全国注册电气工程师考试培训教材

注册电气工程师执业资格考试公共基础考试复习教程

本书编委会 编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

全国注册电气工程师考试培训教材

注册电气工程师执业资格考试
公共基础考试
复习教程

本书编委会编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书完全、严格按照注册电气工程师执业资格考试基础考试考试大纲编写，内容覆盖了公共基础考试的全部内容，即包括数学、物理学、化学、理论力学、材料力学、流体力学、电工电子技术、信号与信息技术、计算机技术、工程经济、法律法规11门课程。对每门课程书中均设有考试大纲要求、复习指导、复习内容、仿真习题和习题答案。

本书适用于参加注册电气工程师执业资格考试基础考试的应试人员，同时也是相关人员日常工作的一部重要参考书。

图书在版编目(CIP)数据

注册电气工程师执业资格考试公共基础考试复习教程/《注册电气工程师执业资格考试公共基础考试复习教程》编委会编. —天津:天津大学出版社,2010.6

ISBN 978-7-5618-3513-5

Ⅰ.①注… Ⅱ.①注… Ⅲ.①电气工程－工程师技术人员－资格考核－自学参考资料 Ⅳ.①TM

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第096075号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
网　　址 www.tjup.com
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 185mm×260mm
印　　张 52.5
字　　数 1310千
版　　次 2010年6月第1版
印　　次 2010年6月第1次
定　　价 99.00元

注册电气工程师执业资格考试
公共基础考试复习教程

编 委 会

编 委 会

序　言

执业资格注册制度为我国工程技术人员个人的执业资格确立了符合国际惯例的规格、标准及严格的认证程序，它的建立和实施，必将进一步推动人才的社会化、市场化和国际化的进程，为我国市场经济的可持续发展提供更加规范的人才保障。执业注册资格考试是资格认证程序的核心环节。执业注册资格考试严格按照相应的考试大纲执行。

全国勘察设计注册工程师执业资格考试大纲是在建设部执业资格注册中心的领导下，根据我国建设行业的具体情况以及与国际接轨的要求制定的。考试大纲由专业考试大纲和基础考试大纲两个部分组成，前者规定了申请者专业能力的测试标准，后者则体现对申请者工程科学背景的要求。

在执业资格考试中设立基础考试程序是基于下述两个方面的考虑：

(1)执业工程师的工程科学背景要求是从行业的角度对从业者提出的要求，它并不完全等同于工科院校的基础和专业基础教育的要求，执业注册资格基础考试并不是工科高校基础教学考试的简单重复；

(2)执业资格考试是一种按照独立标准进行的公平认证程序，它原则上不受申请者的学历、学位、职务等传统条件的严格限制。因此，申请者所受的工程基础教育背景差异甚大，有必要在统一的标准下进行检验。

所以，对于基础考试，申请者不可消极应考。正确的做法应当是：根据自身的具体情况，按照基础考试大纲的内容进行系统的学习与准备，切实地充实、强化自身的工程科学基础，从容应对考试。

鉴于申请者教育背景、毕业年限、工作性质、工作岗位及工作经历等诸多因素的影响，基础考试大纲的内容对申请者而言或欠缺或遗忘的情况是普遍存在的，所以为申请者提供适当的考试辅导是必要的、有益的。

天津大学出版社近年来组织出版的“勘察设计注册工程师基础考试”辅导系列教程，按照考试大纲的要求，全面地综合了各门基础课的主要内容，恰当地把握了其广度和深度，准确地体现了对我国执业资格注册制度及其认证

程序的正确理解和对基础考试大纲条目的深入分析，为应考者提供了重要的学习资料。相信这些系列辅导教程能够为申请者的学习与考试准备提供切实的帮助。热切希望今后能够出版更多的分册，以帮助不同专业的申请者。

全国勘察设计注册工程师基础考试专家组组长　林孔元

前 言

《全国注册电气工程师执业资格考试公共基础考试复习教程》经过天津大学出版社和广大作者的积极努力今天和大家见面了。这部复习教程是按新修订的《勘察设计注册工程师资格考试公共基础考试大纲》要求，在原有教程基础上经过认真的修订而成。这里既凝聚了广大作者的辛勤汗水，同时也广泛汲取了广大读者的宝贵意见和建议，是出版社、作者和读者共同努力的结果。

天津大学出版社十分关注全国勘察设计注册工程师执业资格考试基础考试的进展情况。早在10年前，当我们得知将要举行全国勘察设计注册工程师执业资格考试的时候，就一直密切关注和跟踪考试的进程。当各类考试大纲公布，广大考生积极应考时，我们先后推出了近10种基础考试的复习教程，为广大考生提供了必备的复习资料，受到了广大读者的欢迎。正如全国勘察设计注册工程师基础考试专家组组长林孔元教授所评价的："天津大学出版社近年来组织出版的'勘察设计注册工程师基础考试'辅导系列教程，按照考试大纲的要求，全面地综合了各类基础课的主要内容，恰当地把握了各类课程的广度和深度，准确地体现了对我国执业资格注册制度及其认证程序的正确理解和对基础考试大纲条目的深入分析，为应试者提供了重要的学习资料。"

本次编写的《注册电气工程师执业资格考试公共基础考试复习教程》涵盖了11门基础科目，包括数学、物理学、化学、理论力学、材料力学、流体力学、电工电子技术，信号与信息技术、计算机技术、工程经济、法律法规。为此，我们邀请了天津大学、同济大学、西南交通大学等各学科领域的专家，以考纲为基本依据，以突出基本理论、加强基础训练、提高应试能力为原则，编撰了本复习教程。在编写内容和编写体例上具有如下特点。

(1)内容紧扣考试大纲。书中每一科目均按考试大纲要求编写，覆盖了考纲的全部内容，既照顾知识的相关性与连续性，又保持各科目的相对独立性和针对性。

(2)体例适应考试需要。书中每一科目的编写层次均包括考试大纲、复习指导、复习内容、仿真习题、习题答案，其中：

考试大纲——明示了《注册电气工程师资格考试公共基础考试大纲》

每一科目的具体内容,这是考试和复习的依据;

复习指导——点明了此科目的特点、重点、难点,并针对注册考试的要求,提示应试者如何复习、如何答题;

复习内容——阐述了考试大纲要求的全部内容,使读者建立完整的知识体系,准确掌握重点内容和重要公式;

仿真习题——编排了与考试题型完全相同的习题,供应试者练习,通过习题的演练,熟练运用解题技巧,提高应试水平;

习题答案——给出了全部仿真习题的答案,帮助应试者检验复习程度,对有一定难度又具有共性的习题,还提供了解题思路,以帮助考生掌握解题技巧。

本书共分3篇11部分,其中数学部分由同济大学邱伯驺、何迎晖编写,物理学部分由天津大学孟湛祥编写,化学部分由同济大学施宪法编写,理论力学部分由同济大学徐妙新编写,材料力学部分由同济大学周润玉编写,流体力学部分由西南交通大学禹华谦编写,电工电子技术部分和信号与信息技术部分由天津大学路志英编写,计算机技术部分由天津大学王温君编写,工程经济部分由天津大学郑立群编写,法律法规部分由天津大学李长燕编写。全书由宗洁、杨风和统稿。

本书在组织、编写和出版过程中,得到了许多专家、教授和同行们的大力支持和热心帮助,在此,对他们所付出的辛勤劳动表示衷心的感谢!

对于本复习教程中存在的问题,欢迎广大专家、同行及读者批评、指正。

编者

2010年5月

目 录

工程科学基础

1 数学

考试大纲

1.1 空间解析几何

向量的线性运算;向量的数量积、向量积及混合积;两向量垂直、平行的条件;直线方程;平面方程;平面与平面、直线与直线、平面与直线之间的位置关系;点到平面、直线的距离;球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程;常用的二次曲面方程;空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

1.2 微分学

函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;数列极限与函数极限的定义及其性质;无穷小和无穷大的概念及其关系;无穷小的性质及无穷小的比较;极限的四则运算;函数连续的概念;函数间断点及其类型;导数与微分的概念;导数的几何意义和物理意义;平面曲线的切线和法线;导数和微分的四则运算;高阶导数;微分中值定理;洛必达法则;空间曲线的切线及法平面;曲面的切平面及法线;函数单调性的判别;函数的极值;函数曲线的凹凸性、拐点;偏导数与全微分的概念;二阶偏导数;多元函数的极值和条件极值;多元函数的最大、最小值及其简单应用。

1.3 积分学

原函数与不定积分的概念;不定积分的基本性质;基本积分公式;定积分的基本概念和性质(包括定积分中值定理);积分上限的函数及其导数;牛顿—莱布尼兹公式;不定积分和定积分的换元积分法与分部积分法;有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分;广义积分;二重积分与三重积分的概念、性质、计算和应用;两类曲线积分的概念、性质和计算;求平面图形的面积、平面曲线的弧长和旋转体的体积。

1.4 无穷级数

数项级数的敛散性概念;收敛级数的和;级数的基本性质与级数收敛的必要条件;几何级数与 p 级数及其收敛性;正项级数敛散性的判别法;任意项级数的绝对收敛与条件收

敛;幂级数及其收敛半径、收敛区间和收敛域;幂级数的和函数;函数的泰勒级数展开;函数的傅里叶系数与傅里叶级数。

1.5 常微分方程

常微分方程的基本概念;变量可分离的微分方程;齐次微分方程;一阶线性微分方程;全微分方程;可降阶的高阶微分方程;线性微分方程解的性质及解的结构定理;二阶常系数齐次线性微分方程。

1.6 线性代数

行列式的性质及计算;行列式按行展开定理的应用;矩阵的运算;逆矩阵的概念、性质及求法;矩阵的初等变换和初等矩阵;矩阵的秩;等价矩阵的概念和性质;向量的线性表示;向量组的线性相关和线性无关;线性方程组有解的判定;线性方程组求解;矩阵的特征值和特征向量的概念与性质;相似矩阵的概念和性质;矩阵的相似对角化;二次型及其矩阵表示;合同矩阵的概念和性质;二次型的秩;惯性定理;二次型及其矩阵的正定性。

1.7 概率与数理统计

随机事件与样本空间;事件的关系与运算;概率的基本性质;古典型概率;条件概率;概率的基本公式;事件的独立性;独立重复试验;随机变量;随机变量的分布函数;离散型随机变量的概率分布;连续型随机变量的概率密度;常见随机变量的分布;随机变量的数学期望、方差、标准差及其性质;随机变量函数的数学期望;矩、协方差、相关系数及其性质;总体;个体;简单随机样本;统计量;样本均值;样本方差和样本矩;χ^2 分布;t 分布;F 分布;点估计的概念;估计量与估计值;矩估计法;最大似然估计法;估计量的评选标准;区间估计的概念;单个正态总体的均值和方差的区间估计;两个正态总体的均值差和方差比的区间估计;显著性检验;单个正态总体的均值和方差的假设检验。

复习指导

全国勘察设计注册工程师执业资格考试中有关数学的试题覆盖高等学校本科教学中高等数学、线性代数、概率论与数理统计三门课程的内容,试题的形式为"四选一"的单项选择题,试题的要求是测试对上述三门课程中基本内容的理解和掌握的水平.虽然试题的题型单一,但涉及的内容可以是基本概念、基本理论、基本方法和运算技能以及有关知识的应用.因此,复习时最重要的一点是应该按考试大纲的要求,掌握好"三基",这是备考的最基本的方法;同时,也应注意灵活运用所学过的知识,掌握一些解选择题的技巧.下面的例题及解答,就是对以上建议的一种具体说明.

【例 1-1】 设函数

$$f(x)=\begin{cases}ax+b, & x\leqslant 1,\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

在 $x=1$ 处连续且可导,则(　　).

(A) $a=0,b=1$　(B) $a=1,b=0$　(C) $a=2,b=-1$　(D) $a=-1,b=2$

解：$f(1^-)$①$=a+b$，$f(1^+)=1$，$f(1)=a+b$.
欲使$f(x)$在$x=1$处连续，应有$f(1^-)=f(1^+)=f(1)$，即$a+b=1$.

又 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{ax+b-(a+b)}{x-1}=a$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-(a+b)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2.$

欲使$f(x)$在$x=1$处可导，应有$f'_-(1)=f'_+(1)$，即$a=2$. 从而$b=-1$，故应选(C).

本题也可通过直接验证来解，显然(A)、(B)、(D)都不满足可导性，故选(C). 本题侧重测试基本概念——函数的连续性与可导性.

△【例 1-2】 已知$f'(x)=\dfrac{1}{x(1+2\ln x)}$，且$f(1)=1$，则$f(x)$等于(　　).

(A) $\ln(1+2\ln x)+1$　　(B) $\dfrac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+1$

(C) $\dfrac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+\dfrac{1}{2}$　　(D) $2\ln(1+2\ln x)+1$

解：$f(x)=\displaystyle\int\frac{dx}{x(1+2\ln x)}=\int\frac{d\ln x}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{1}{2}\ln(1+2\ln x)+C$，

以$f(1)=1$代入上式，得$C=1$，故选(B).

本题也可以不用积分，而通过求导来解答，解法如下：

因为$[\ln(1+2\ln x)]'=\dfrac{1}{1+2\ln x}\cdot\dfrac{2}{x}=2f'(x)$，

故排除(A)、(D)；又由$f(1)=1$，排除(C)，故选(B).

本题着重测试基本方法和运算技能——积分法或微分法.

△【例 1-3】 设非齐次线性微分方程$y'+P(x)y=Q(x)$有两个不同的解：$y_1(x)$与$y_2(x)$，C为任意常数，则该方程的通解是(　　).

(A) $C[(y_1(x)-y_2(x)]$　　(B) $y_1(x)+C[(y_1(x)-y_2(x)]$

(C) $C[(y_1(x)+y_2(x)]$　　(D) $y_1(x)+C[(y_1(x)+y_2(x)]$

解：$y_1(x)-y_2(x)$是对应的齐次方程$y'+P(x)y=0$的解，从而由线性微分方程解的性质定理知$C[(y_1(x)-y_2(x)]$是齐次方程的通解，再由线性非齐次方程解的结构定理知$y_1(x)+C[(y_1(x)-y_2(x)]$是原方程的通解，故选(B).

本题着重测试线性微分方程解的性质及解的结构.

【例 1-4】 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=|x|$，则$f(x)$的傅里叶级数为(　　).

(A) $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$

(B) $\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{2^2}\sin 2x+\dfrac{1}{4^2}\sin 4x+\dfrac{1}{6^2}\sin 6x+\cdots\right)$

① $f(1^-)$表示$f(x)$在$x=1$处的左极限，在《高等数学》(同济大学数学教研室主编，第3版)中记作$f(1-0)$；$f(1^+)$表示$f(x)$在$x=1$处的右极限，在第3版中记作$f(1+0)$.

(C) $\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$

(D) $\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{2^2}\cos 2x+\frac{1}{4^2}\cos 4x+\frac{1}{6^2}\cos 6x+\cdots\right)$

解:因为函数$f(x)$是偶函数,$f(x)$的傅里叶级数是余弦级数,故排除(B).又因为

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\mathrm{d}x=\pi\neq 0,$$

故(C)与(D)排除,从而选(A).

本题是测试傅里叶级数的基础知识,利用这些基础知识,进行分析判别,排除错误的选项,作出正确的选择,而不必去进行全体傅里叶系数的计算.

【例1-5】 设A是一个n阶方阵,已知$|A|=2$,则$|-2A|$等于(　　).

(A) $(-2)^{n+1}$　　(B) $(-1)^n 2^{n+1}$　　(C) -2^{n+1}　　(D) -2^2

解:按照矩阵中行列式运算的性质

$$|-2A|=(-2)^n|A|=(-1)^n 2^{n+1},$$

故应选(B).

本题测试矩阵运算的性质.这里要防止出现下列常见错误:$|-2A|=(-2)|A|=-2^2$,出现这种错误的原因是混淆了矩阵运算性质与行列式运算性质之间的差异.

【例1-6】 设连续型随机变量X的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ kx^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

则k等于(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 1

解:由于连续型随机变量的分布函数是连续函数,因此,由$F(x)$在$x=1$处连续得到$F(1^-)=F(1)$,即$k=1$.故应选(D).

本题也可以通过先求X的概率密度来解题.由于X的概率密度

$$p(x)=F'(x)=\begin{cases}2kx, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因此,由$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\mathrm{d}x=1$　解得

$$\int_0^1 2kx\mathrm{d}x=k=1.$$

本题测试连续型随机变量分布函数的性质.由于对任意一个随机变量,分布函数右连续总是满足的,因此分布函数在任意一点处连续等价于左连续,这为具体计算提供了方便.

复习内容

1.1 空间解析几何

要求:①理解向量的概念及其表示,掌握向量的线性运算、数量积、向量积及混合积,了解两个向量垂直、平行的条件,掌握单位向量、方向余弦、向量的坐标表达式以及用坐标表达式进

行向量运算的方法。

②掌握平面的方程和直线的方程及其求法,会利用平面、直线的相互之间的位置关系解决有关问题。

③了解常用二次曲面的方程及其图形,会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程及母线平行于坐标轴的柱面方程,了解空间曲线的参数方程和一般方程以及空间曲线在坐标面上的投影曲线方程。

1.1.1 向量代数

1. 向量及其线性运算

既有大小又有方向的量,如位移、速度、力等这类量,称为向量.向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模,记作 $|\boldsymbol{a}|$.

向量的加减法、向量与数的乘法统称为向量的线性运算.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 是一个向量 $\boldsymbol{c}$,利用平行四边形法则或三角形法则可得向量 $\boldsymbol{c}$,如图 1.1-1,1.1-2 所示.

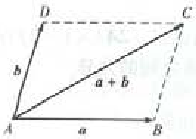

图 1.1-1

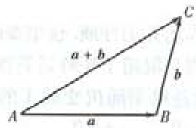

图 1.1-2

向量的加法符合下列运算规律:

①交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$.

②结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 定义为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$ 的和,即

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}).$$

由向量加法的三角形法则可知:

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|,\ |\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$,它是一个向量,它的模

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|,$$

它的方向当 $\lambda>0$ 时,与向量 $\boldsymbol{a}$ 相同;当 $\lambda<0$ 时,与向量 $\boldsymbol{a}$ 相反.

向量与数的乘积符合下列运算规律:

①结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

②分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

由向量与数的乘积的定义,可得以下定理.

定理 设向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,那么,向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 平行的充分必要条件是:存在唯一的实数 λ,使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

2. 向量的坐标

设有空间直角坐标系 $O-xyz$,$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x、y、z 轴正向的单位向量,$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ 是以

$M_1(x_1,y_1,z_1)$为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$为终点的向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 可表示为

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k},$$

或 $$\boldsymbol{a}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)①,$$

其中 x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标.

利用向量的坐标，可得向量的加法、减法以及向量与数的乘法运算如下：

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z),\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y,a_z+b_z),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_x-b_x,a_y-b_y,a_z-b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z).$$

非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与三条坐标轴正向的夹角 α、β、γ 称为它的方向角. 向量的模、方向角与坐标之间有如下关系：

$$a_x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha,a_y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta,a_z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$、$\cos\beta$、$\cos\gamma$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

利用向量的坐标可得向量的模与方向余弦如下：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2},$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}},\cos\gamma=\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}.$$

由上式可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

以向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为坐标的向量$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量.

3. 数量积　向量积　混合积

设向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$，向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的数量积为一个数量，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，其大小为$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta.$$

向量 $\boldsymbol{a}$ 在轴 u 上的投影（记作 $\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}$）等于向量 $\boldsymbol{a}$ 的模乘以轴与向量 $\boldsymbol{a}$ 的夹角 φ 的余弦，即

$$\mathrm{Prj}_u\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\varphi.$$

利用向量在轴上的投影，可将数量积表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_a\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_b\boldsymbol{a}$$

由数量积的定义可知，向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

向量的数量积符合下列运算规律：

①交换律　$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

②分配律　$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

③结合律　$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$，$\lambda$ 为实数.

向量 $\boldsymbol{a}$ 和向量 $\boldsymbol{b}$ 的向量积为一个向量 $\boldsymbol{c}$，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的模

$$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

---

① 在《高等数学》（同济大学数学教研室主编，第3版）中，记作 $a=\{x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1\}$，现在按国家标准，花括弧改成圆括弧.

$\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面,$\boldsymbol{c}$ 的指向按右手法则确定.

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x),$$

或

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

由向量积的定义可知,向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

向量的向量积符合下列运算规律:

①$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 这表明交换律对向量积不成立.

②分配律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

③结合律 $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$,$\lambda$ 为实数.

三个向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 的混合积是一个数量,这个数量通过先作向量积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$,再作数量积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 得到,混合积记作$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$,即

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$$

设 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$,$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$,$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$,则

$$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$$

向量的混合积$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$有下述几何意义:

$[\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}]$是这样一个数,它的绝对值表示以向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 为棱的平行六面体的体积,它的符号由向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 组成右手系还是左手系来确定,前者为正,后者为负.

【例 1.1-1】 设已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$,计算向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模、方向余弦和方向角.

解:$\overrightarrow{M_1M_2}=(1-2,3-2,0-\sqrt{2})=(-1,1,-\sqrt{2})$,

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+(-\sqrt{2})^2}=2,$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{2},\cos\beta=\frac{1}{2},\cos\gamma=-\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\alpha=\frac{2\pi}{3},\beta=\frac{\pi}{3},\gamma=\frac{3\pi}{4}.$$

【例 1.1-2】 设质量为 100 kg 的物体从点 $M_1(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1,4,2)$. 计算重力做功(长度单位为 m,重力方向为 z 轴负方向).

解:重力 $\boldsymbol{P}=(0,0,-mg)=(0,0,-980)$,

位移向量$\overrightarrow{M_1M_2}=(-2,3,-6)$.

按数量积的物理意义,重力做功 W 即为向量 $\boldsymbol{P}$ 和向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的数量积,故

$$W=\boldsymbol{P}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}=(-980)(-6)=5\ 880\ (\mathrm{J}).$$

【例 1.1-3】 设向量 $\boldsymbol{a}=(-2,4,4)$,$\boldsymbol{b}=(0,6,3)$,则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为(　　).

(A) $\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$ (B) $\arccos\frac{2}{\sqrt{6}}$ (C) $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ (D) $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$

解：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0+24+12=36$，

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-2)^2+4^2+4^2}=6,$$

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{0+6^2+3^2}=3\sqrt{5},$$

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{36}{6\times3\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

故应选(C).

【例 1.1-4】 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均为向量，下列命题中错误的是(　　).

(A) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

(B) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

(C) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$

(D) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件是 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$

解：命题(A)、(B)、(C)都是正确的，而等式

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2,$$

根据向量的数量积的运算规律，对一般的向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 均成立，因此，这等式不能成为向量 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 的充分必要条件，故应选(D).

【例 1.1-5】 已知三角形 ABC 的顶点是 $A(1,2,3)$，$B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$. 求三角形 ABC 的面积.

解：根据向量积的定义，可知三角形 ABC 的面积

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|.$$

而 $$\overrightarrow{AB}=(2,2,2),\overrightarrow{AC}=(1,2,4),$$

故 $$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&2&2\\1&2&4\end{vmatrix}=4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|4\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{14}.$$

【例 1.1-6】 已知不在一平面上的四点：$A(x_1,y_1,z_1)$、$B(x_2,y_2,z_2)$、$C(x_3,y_3,z_3)$、$D(x_4,y_4,z_4)$，求四面体 $ABCD$ 的体积.

解：四面体 $ABCD$ 的体积 V 等于以向量 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$ 和 $\overrightarrow{AD}$ 为棱的平行六面体的体积的六分之一，由混合积的几何意义知，六面体的体积等于 $[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}]$ 的绝对值，故

$$V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix}x_2-x_1&y_2-y_1&z_2-z_1\\x_3-x_1&y_3-y_1&z_3-z_1\\x_4-x_1&y_4-y_1&z_4-z_1\end{vmatrix}.$$

上式中符号的选择与行列式的值的符号一致.

1.1.2 平面

1. 平面的方程

设平面 Π 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，它的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则平面 Π 的方程为

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

此方程称为平面的点法式方程.

平面的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 为该平面的法向量.

设一平面与 x、y、z 轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$ 和 $R(0,0,c)$ 三点(其中 $a\neq0,b\neq0,c\neq0$),则该平面的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

此方程称为平面的截距式方程,a、b、c 依次称为平面在 x、y、z 轴上的截距.

对于一些特殊的三元一次方程,应该熟悉它们的图形的特点.

如,在方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

中,当 $D=0$ 时,方程表示一个通过原点的平面;当 $A=0$ 时,方程表示一个平行于 x 轴的平面;当 $A=B=0$ 时,方程表示一个平行于 xOy 面的平面. 类似地,可得其他情形的结论.

2. 两平面的夹角

两平面的法向量的夹角称为两平面的夹角(通常指锐角). 设有平面 $\Pi_1:A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 $\Pi_2:A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,则 Π_1 和 Π_2 的夹角 θ 由下式确定:

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

由此可得

Π_1 与 Π_2 互相垂直相当于 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$,

Π_1 与 Π_2 平行相当于 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

3. 点到平面的距离

空间一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面

$$Ax+By+Cz+D=0$$

的距离,由以下公式计算:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

【例 1.1-7】 在空间直角坐标系中,方程 $x=2$ 表示( ).

(A)x 轴上的点(2,0,0)　　(B)xOy 平面上的直线 $x=2$

(C)过点(2,0,0)且平行于 yOz 面的平面　　(D)过点(2,0,0)的任意平面

解:方程 $x=2$ 是一个特殊的三元一次方程,它表示一个平面,因此(A)、(B)不正确;方程 $x=2$ 中,$B=C=0$,它表示一个平行于 yOz 面的平面,因此,(D)不正确,故选(C).

【例 1.1-8】 平行于 x 轴且经过点(4,0,-2)和点(2,1,1)的平面方程是( ).

(A)$x-4y+2z=0$　(B)$3x+2z-8=0$　(C)$3y-z-2=0$　(D)$3y+z-4=0$

解:由平面平行于 x 轴知,平面方程中 x 的系数为 0,故(A)、(B)不正确. 由平面经过两已知点,易知(C)满足,应选(C).

【例1.1-9】 求过三点 $M_1(2,-1,4)$，$M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$ 的平面的方程.

解：先找出平面的法向量 $\boldsymbol{n}$，可取 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-3,4,-6)$ 与 $\overrightarrow{M_1M_3}=(-2,3,-1)$ 的向量积为 $\boldsymbol{n}$，即

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -3 & 4 & -6\\ -2 & 3 & -1\end{vmatrix}=14\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k},$$

由平面的点法式方程，得所求平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

即 $$14x+9y-z-15=0.$$

【例1.1-10】 求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

解：因为

$$\cos\theta=\frac{|1\cdot 2+(-1)\cdot 1+2\cdot 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2},$$

故所求夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$.

1.1.3 直线

1. 空间直线的方程

设空间直线 L 是平面 Π_1：$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和平面 Π_2：$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ 的交线，则 L 的方程为

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\end{cases}$$

此方程称为空间直线的一般方程.

设直线 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，它的一个方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，则直线 L 的方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

此方程称为直线的对称式方程.

如设参数 t 如下：

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t,$$

则

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\\ z=z_0+pt,\end{cases}$$

此方程组称为直线的参数式方程.

2. 两直线的夹角

两直线的方向向量的夹角叫做两直线的夹角（通常指锐角）. 设直线 L_1：

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

和直线 L_2：

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

则 L_1 和 L_2 的夹角 φ 可由下式确定：

$$\cos\varphi=\frac{|s_1\cdot s_2|}{|s_1||s_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

由此可得：

L_1 和 L_2 互相垂直相当于 $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$，

L_1 和 L_2 相互平行相当于 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

3. 直线与平面的夹角

直线和它在平面上的投影的夹角 φ 称为直线与平面的夹角，通常规定 $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 设直线的方程是

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

平面的方程是

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

则直线与平面的夹角 φ 由下式确定：

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

由此可得

直线与平面垂直相当于 $\dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$，

直线与平面平行或直线在平面上相当于 $Am+Bn+Cp=0$.

4. 点到直线的距离

设 M_0 是直线 L 外一点，M 是直线 L 上任意一点，且直线的方向向量为 s，则由向量积的几何意义知 $|\overrightarrow{M_0M}\times s|$ 表示以 $\overrightarrow{M_0M}$，s 为棱的平行四边形的面积，而 $\dfrac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}$ 表示以 $|s|$ 为边长的该平行四边形的高，即为点 M_0 到直线 L 的距离 d，即

$$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M}\times s|}{|s|}.$$

【例 1.1-11】 求过两点 $M_1(3,-2,1)$ 和 $M_2(-1,0,2)$ 的直线方程.

解：取 $\overrightarrow{M_1M_2}=(-4,2,1)$ 为直线的方向向量，由直线的对称式方程得所求直线方程为

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}.$$

【例 1.1-12】 设直线 L 的方程为

$$\begin{cases}x-y+z=1,\\2x+y+z=4,\end{cases}$$

则 L 的参数方程是（　　）.

(A) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=1+t,\\z=1+3t\end{cases}$ (B) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=-1+t,\\z=1+3t\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=1-t,\\z=1+3t\end{cases}$ (D) $\begin{cases}x=1-2t,\\y=-1-t,\\z=1+3t\end{cases}$

解：由于两平面的交线 L 与这两平面的法线向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,-1,1)$，$\boldsymbol{n}_2=(2,1,1)$ 都垂直，所以直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}$ 可取 $\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$，即

$$\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&1\\2&1&1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

由此可知(C)与(D)不正确.

而点(1,1,1)是直线 L 上的一点，故应选(A).

【例 1.1-13】 求直线 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ 和直线 $L_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{-1}$ 的夹角.

解：直线 L_1 和 L_2 的方向向量依次为 $\boldsymbol{s}_1=(1,-4,1)$，$\boldsymbol{s}_2=(2,-2,-1)$. 设直线 L_1 和 L_2 的夹角为 φ，则

$$\cos\varphi=\frac{|1\cdot2+(-4)(-2)+1\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+1^2}\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

所以 $\qquad \varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

【例 1.1-14】 直线 $L:2x=5y=z-1$ 与平面 $\Pi:4x-2z=5$ 的位置关系是（ ）.

(A) 直线 L 与平面 Π 平行 (B) 直线 L 与平面 Π 垂直

(C) 直线 L 在平面 Π 上 (D) 直线 L 与平面 Π 相交，但不垂直

解：直线 L 的方程可改写为

$$\frac{x}{\frac{5}{2}}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{5},$$

由此可得直线 L 的方向向量 $\boldsymbol{s}=\left(\dfrac{5}{2},1,5\right)$. 平面 Π 的法向量 $\boldsymbol{n}=(4,0,-2)$.

$$\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{n}=4\cdot\frac{5}{2}+0-2\cdot5=0,$$

故直线与平面平行或直线在平面上. 又 L 上一点(0,0,1)不在平面 Π 上，故选(A).

【例 1.1-15】 求点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $L:\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离.

解：直线 L 的方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&1&-1\\2&-1&1\end{vmatrix}=(0,-3,-3)$$

在直线 L 上取点 $M(1,-2,0)$，则由点到直线的距离公式得

$$d=\frac{|\overrightarrow{PM}\times\boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|}=\frac{\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+6^2}}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

1.1.4 柱面 旋转曲面 二次曲面

1. 柱面

平行于定直线并沿定曲线 C 移动的直线 L 形成的轨迹叫做柱面,定曲线 C 叫做柱面的准线,动直线 L 叫做柱面的母线. 例如,以 xOy 平面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 为准线,平行于 z 轴的直线为母线的圆柱面

$$x^2+y^2=R^2,$$

以 xOy 平面上的抛物线 $y^2=2x$ 为准线,平行于 z 轴的直线为母线的抛物柱面

$$y^2=2x.$$

在空间直角坐标系中,如果曲面方程 $F(x,y,z)=0$ 中,缺少某个变量,那么该方程一般表示一个柱面. 例如,方程 $F(x,y)=0$ 一般表示一个母线平行于 z 轴的柱面,方程 $G(x,z)=0$, $H(y,z)=0$ 依次表示一个母线平行于 y 轴、x 轴的柱面. 以下三个方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$x^2=ay$$

依次表示母线平行于 z 轴的椭圆柱面、双曲柱面、抛物柱面.

2. 旋转曲面

以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面叫做旋转曲面,旋转曲线和定直线依次叫做旋转曲面的母线和轴. 例如,顶点在坐标原点 O,旋转轴为 z 轴,半顶角为 α 的圆锥面

$$z^2=a^2(x^2+y^2),(a=\cot\alpha)$$

已知旋转曲面的母线 C 的方程为

$$\begin{cases}f(y,z)=0,\\x=0,\end{cases}$$

旋转轴为 z 轴,只要将母线的方程 $f(y,z)=0$ 中的 y 换成 $\pm\sqrt{x^2+y^2}$,便得曲线 C 绕 z 轴旋转所成的旋转曲面的方程,即

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

同理,曲线 C 绕 y 轴旋转所成的旋转曲面的方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

3. 二次曲面

三元二次方程所表示的曲面叫做二次曲面. 例如:

球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$,

圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=z^2$,

椭圆锥面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2,(a\neq b)$

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$,

椭圆抛物面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-z$,

双曲抛物面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$,

单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$,

双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

注意:以上方程是二次曲面的标准方程,还应知道它们的各种变形.

【例 1.1-16】 方程 $z^2-x^2-y^2=0$ 所表示的曲面是(　　).

(A)单叶双曲面　(B)双叶双曲面　(C)旋转双曲面　(D)圆锥面

解:在顶点位于原点、旋转轴为 z 轴的圆锥面方程中,令 $a=1$,即为所给方程,故选(D).

【例 1.1-17】 下列结论中,错误的是(　　).

(A) $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面　(B) $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

(C) $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面　(D) $y^2=5x$ 表示抛物柱面

解:(B)中的方程,即

$$x^2+2y^2-3z^2=1,$$

表示单叶双曲面,故结论(B)是错误的,应选(B).

【例 1.1-18】 将双曲线 C:

$$\begin{cases}4x^2-9y^2=36,\\ z=0\end{cases}$$

绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程是(　　).

(A) $4(x^2+z^2)-9y^2=36$　(B) $4x^2-9(y^2+z^2)=36$

(C) $4x^2-9y^2=36$　(D) $4(x^2+y^2)-9z^2=36$

解:双曲线 C 绕 x 轴旋转,只需将 C 的方程中的 y 换成 $\pm\sqrt{y^2+z^2}$,故应选(B).

1.1.5 空间曲线

1. 空间曲线的方程

空间曲线可以看做是两个曲面的交线. 若空间曲线 C 是曲面

$$F(x,y,z)=0 \text{ 和 } G(x,y,z)=0$$

的交线,则 C 的方程可用下述方程组表示

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\end{cases}$$

此方程组称为空间曲线 C 的一般方程.

若将空间曲线 C 上动点的坐标 x,y,z 表示为参数 t 的函数,即

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\\ z=z(t),\end{cases}$$

这方程组称为空间曲线 C 的参数方程.

例如,参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta,\\y=a\sin\theta,\\z=b\theta,\end{cases}$$

表示的空间曲线是螺旋线.

2. 空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

由以上方程组消去变量 z 后所得的方程

$$H(x,y)=0,$$

表示母线平行于 z 轴,且包含曲线 C 的柱面. 以曲线 C 为准线、母线平行于 z 轴的柱面称为曲线 C 关于 xOy 面的投影柱面,投影柱面与 xOy 面的交线称为曲线 C 在 xOy 面上的投影. 因此方程 $H(x,y)=0$ 必定包含投影柱面,而方程

$$\begin{cases}H(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$$

所表示的曲线必定包含空间曲线 C 在 xOy 面上的投影.

【例 1.1-19】 设一个立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 所围成(图 1.1-3). 求它在 xOy 面上的投影.

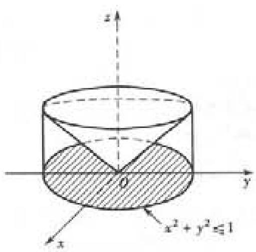

图 1.1-3

解:上半球面和锥面的交线为 C:

$$\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\z=\sqrt{3(x^2+y^2)}.\end{cases}$$

由以上方程组消去 z,得到

$$x^2+y^2=1.$$

这恰好是交线 C 在 xOy 面上的投影柱面,交线 C 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=0.\end{cases}$$

从而立体在 xOy 面上的投影为 $\{(x,y,0)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$.

1.2 微分学

要求:①理解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性的概念,并会具体判定。

②理解极限的概念,掌握极限的有理运算法则,会用变量代换求某些简单复合函数的极限。

③了解极限的性质和两个极限存在准则,会用两个重要极限求极限。

④了解无穷小、无穷大、高阶无穷小和等价无穷小的概念,会用等价无穷小求极限。

⑤理解函数在一点连续和在一个区间上连续的概念,了解函数间断点的概念,会判别函数间断点的类型,了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质。

⑥理解导数的概念及其几何意义和物理意义,掌握导数的四则运算法则和复合函数的求

导法则，掌握基本初等函数的导数公式。

⑦理解函数微分的概念，函数可导与可微的关系，了解微分概念中所包含的局部线性化思想，了解函数微分的运算法则和一阶微分形式的不变性。

⑧了解高阶导数的概念，掌握初等函数一阶、二阶导数的求法，会求隐函数和由参数方程所确定的函数的一阶导数及比较简单的二阶导数。

⑨理解罗尔定理和拉格朗日定理，会用洛必达法则求不定式的极限。

⑩理解函数的极值概念，掌握用导数判定函数的单调性和求极值的方法，会用导数判断曲线的凹凸性，会求曲线的拐点。

⑪理解二元函数偏导数与全微分的概念，了解全微分存在的必要条件与充分条件。

⑫掌握复合函数一阶偏导数的求法，会求复合函数的二阶偏导数，会求隐函数的一阶偏导数。

⑬了解曲线的切线和法平面以及曲面的切平面与法线等概念，并会求它们的方程。

⑭理解多元函数的极值概念，掌握多元函数在某点取得极值的必要条件，了解多元函数在某点取得极值的充分条件，会求多元函数的极值和条件极值，多元函数的最大、最小值及其简单应用。

1.2.1 函数与极限

1. 函数的几种特性

(1)函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X\subset D$. 若存在数K_1，使得$f(x)\leqslant K_1$，对任一$x\in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有上界，而K_1称为函数$f(x)$在X上的一个上界；若存在数K_2，使得$f(x)\geqslant K_2$对任一$x\in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有下界，而K_2称为函数$f(x)$在X上的一个下界；若存在正数M，使得$|f(x)|\leqslant M$对任一$x\in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有界；若这样的M不存在，就称函数$f(x)$在X上无界.

函数$f(x)$在X上有界的充分必要条件是它在X上既有上界又有下界.

(2)函数的单调性

设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$. 若对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是单调增加的；若对于区间I上任意两点x_1及x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称函数$f(x)$在区间I上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3)函数的奇偶性

设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称. 若对于任一$x\in D$，$f(-x)=f(x)$恒成立，则称函数$f(x)$为偶函数；若对于任一$x\in D$，$f(-x)=-f(x)$恒成立，则称函数$f(x)$为奇函数.

偶函数的图形关于y轴是对称的；奇函数的图形关于原点是对称的.

(4)函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D. 若存在一个不为零的数T，使得对于任一$x\in D$有$(x\pm T)\in D$，且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立，则称$f(x)$为周期函数，T称为$f(x)$的周期. 通常说周期函数的周期是指最小正周期.

2. 函数的极限

(1)函数极限的概念　无穷小与无穷大

函数的极限按自变量的变化趋向 $x\to x_0$ 与 $x\to\infty$ 可分成以下两种.

当 $x\to x_0$ 时,$f(x)$ 无限趋近于常数 A,称作 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限为 A,记成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$;

当 $x\to\infty$ 时,$f(x)$ 无限趋近于常数 A,称作 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限为 A,记成 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$.

它们的严格数学定义需用"$\varepsilon-\delta$"或"$\varepsilon-X$"来描述,可参阅相关教材.

关于函数的极限,有如下性质.

定理 1(函数极限的唯一性)　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,那么这极限唯一.

定理 2(函数极限的局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$.

定理 3(函数极限的局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,而且 $A>0$(或 $A<0$),那么存在常数 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

定理 4(函数极限与数列极限的关系)　如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列,且满足:$x_n\neq x_0(n=1,2,3,\cdots)$,那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

对于 $x\to\infty$ 时,函数极限的性质,只需按照上述性质相应地作一些修改,便可得出.

在函数极限的定义中,若 $f(x)$ 当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限 $A=0$,则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

若当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时,$f(x)$ 的绝对值 $|f(x)|$ 无限增大,则称 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大,记成 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$(或 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$).

注意:按函数极限的定义,$f(x)$ 为无穷大是极限不存在的一种特殊情形,但习惯上也称"函数的极限为无穷大".

无穷小与函数的极限,有如下关系:

定理　在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是无穷小.

无穷小与无穷大,有如下关系:

定理　在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;反之,如果 $f(x)$ 为无穷小,且 $f(x)\neq0$,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(2)左、右极限

在函数极限的概念中,自变量 $x\to x_0$ 的变化趋向,x 可以从 x_0 的左、右两侧趋向于 x_0. 但有时只需考虑 x 仅从 x_0 的左侧趋向于 x_0(记成 $x\to x_0^-$),或 x 仅从 x_0 的右侧趋向于 x_0(记成

$x \to x_0^+$)①.

若当 $x \to x_0^-$ 时，$f(x)$ 无限趋近于常数 A，则称 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的左极限为 A，记成 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0^-) = A$.

类似地，有 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的右极限，记成 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 或 $f(x_0^+)$，以及 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$，$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时的极限存在的充分必要条件是函数的左、右极限均存在且相等，即

$$f(x_0^-) = f(x_0^+)\left(\text{或} \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x)\right).$$

(3) 极限运算法则

关于函数极限的运算法则，有以下几个定理。

定理 1 有限个无穷小的和也是无穷小.

定理 2 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

定理 3 （极限的四则运算法则）

若 $\lim f(x) = A$，$\lim g(x) = B$，则

① $\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$.

② $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$.

③ $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$（当 $\lim g(x) = B \neq 0$ 时）.

注意：上述记号“lim”下面的自变量变化过程可以是 $x \to x_0$，$x \to \infty$，$x \to x_0^-$，$x \to x_0^+$，$x \to -\infty$，$x \to +\infty$，但等号两端出现的必须是同一种.

定理 4 如果 $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$，而 $\lim \varphi(x) = a$，$\lim \psi(x) = b$，那么 $a \geqslant b$.

注意：上述记号“lim”下面是同一自变量的变化过程.

定理 5 （复合函数的极限运算法则） 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 与函数 $u = g(x)$ 复合而成，$f[g(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有意义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$，且存在 $\delta_0 > 0$，当 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时，有 $g(x) \neq u_0$，则

$$\lim_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim_{u \to u_0} f(u) = A.$$

3. 极限存在准则和两个重要极限

(1) 夹逼准则和极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

准则 Ⅰ （数列情形）若数列 x_n，y_n 及 z_n 满足条件：$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 且 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$，则数列 x_n 的极限存在且 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

准则 Ⅰ′ （函数情形）若函数 $f(x)$，$g(x)$ 及 $h(x)$ 满足条件：

① 当 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > M$）时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；

---

① 在《高等数学》（同济大学数学教研室主编，第 3 版）中，x 从 x_0 的左侧（右侧）趋向于 x_0，记成 $x \to x_0 - 0$ $(x \to x_0 + 0)$，现在按照国家标准，改记成 $x \to x_0^-$ $(x \to x_0^+)$. 相应地，函数的左、右极限在第 3 版中记成 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ 或 $f(x_0 - 0)$（$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ 或 $f(x_0 + 0)$），现改记成 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ 或 $f(x_0^-)$（$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ 或 $f(x_0^+)$）.

② $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

则 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$存在，且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$.

利用准则 I ′，可得一个重要极限

$$\lim_{x \to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

(2)单调有界准则和极限$\lim\limits_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

准则 Ⅱ 单调有界的数列(或函数)必有极限.

利用准则Ⅱ，可得另一个重要极限

$$\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e},$$

或
$$\lim_{x \to \infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}, \lim_{z \to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = \mathrm{e}.$$

其中 e 是一个无理数，e = 2.718 28…….

4. 无穷小的比较

设 α 及 β 都是在同一个自变量变化过程中的无穷小，且 $\alpha \neq 0$，$\lim\frac{\beta}{\alpha}$也是在这个变化过程中的极限.

①若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = 0$，就称 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$，并称 α 是比 β 低阶的无穷小.

②若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，就称 β 是与 α 同阶的无穷小.

③若 $\lim\frac{\beta}{\alpha} = 1$，就称 β 是与 α 等价的无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

关于等价无穷小，有以下性质：

若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim\frac{\beta'}{\alpha'}$存在，则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha} = \lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

当 $x \to 0$ 时，有以下常用的等价无穷小：

$$x \sim \sin x \sim \tan x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \mathrm{e}^x - 1 \sim x, \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x.$$

【例 1.2-1】 求$\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3}$.

解：$\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^3-1}{x^2-5x+3} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}(x^3-1)}{\lim\limits_{x \to 2}(x^2-5x+3)} = \frac{\lim\limits_{x \to 2}x^3 - \lim\limits_{x \to 2}1}{\lim\limits_{x \to 2}x^2 - 5\lim\limits_{x \to 2}x + \lim\limits_{x \to 2}3} = \frac{2^3-1}{2^2-5 \cdot 2+3} = -\frac{7}{3}$.

一般地,对有理分式函数

$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)},$$

其中 $P(x)$、$Q(x)$ 是多项式,若 $\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)=Q(x_0)\neq 0$,则

$$\lim_{x\to x_0}F(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=F(x_0).$$

注意:若 $Q(x_0)=0$,则关于商的极限运算法则不能应用,需特殊考虑.

【例 1.2-2】 求 $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}$.

解:$\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=0$,不能应用商的极限运算法则. 但分子、分母有公因子 $x-3$,故

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

【例 1.2-3】 求 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}$.

解:$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-5x+4)=0$,$\lim\limits_{x\to 1}(2x-3)=-1$,故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{2x-3}=0,$$

从而 $$\lim_{x\to 1}\frac{2x-3}{x^2-5x+4}=\infty.$$

【例 1.2-4】 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}$.

解:当 $x\to\infty$ 时,分子、分母都为无穷大,不能应用商的极限运算法则,但可先用 x^3 去除分子、分母,故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+4x^2+2}{7x^3+5x^2-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^3}}{7+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}=\frac{3}{7}.$$

【例 1.2-5】 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ 等于(　　).

(A)1　　(B)0　　(C)不存在且不是 ∞　　(D)∞

解:由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,$|\sin x|\leq 1$,按照"有界函数与无穷小的乘积是无穷小",故应选(B).注意不要与极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 相混淆.

【例 1.2-6】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

解:$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}.$$

【例 1.2-7】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$.

解：令 $x=-t$，则当 $x\to\infty$ 时，$t\to\infty$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-t}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t}=\frac{1}{e}.$$

【例 1.2-8】 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}$.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^2=e^2$.

【例 1.2-9】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$①.

解：当 $x\to0$ 时，$\tan 2x\sim2x$，$\sin 5x\sim5x$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{5x}=\frac{2}{5}.$$

【例 1.2-10】 求$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解：当 $x\to0$ 时，$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}x^2$，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}.$$

【例 1.2-11】 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$等于(　　).

(A)2　　(B)0　　(C)∞　　(D)不存在且不是∞

解：因为 $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=0,$$

故极限不存在，且不是∞，应选(D).

【例 1.2-12】 设$f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to0$ 时，有(　　).

(A)$f(x)$与 x 是等价无穷小　　(B)$f(x)$与 x 同阶但非等价无穷小

(C)$f(x)$是比 x 高阶的无穷小　　(D)$f(x)$是比 x 低阶的无穷小

解：因为$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(2^x+3^x-2)=0$,

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{2^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{3^x-1}{x}=\ln2+\ln3=\ln6\neq1,$$

所以应选(B).

① $\tan x$ 即 $\mathrm{tg}\,x$.

【例 1.2-13】 当 $x\to 0$ 时，$\tan x-\sin x$ 是 x^3 的（　　）.

(A)高阶无穷小　　(B)低阶无穷小

(C)同阶但非等价无穷小　　(D)等价无穷小

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\tan x}{x}\cdot\dfrac{1-\cos x}{x^2}\right)=1\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，

所以应选(C).

注意：当 $x\to 0$ 时，$\tan x\sim x$，$\sin x\sim x$，但不能得出 $\tan x-\sin x\sim x-x=0$，从而得出上述极限为零，而选(A). 事实上，上面的计算结果表明 $\tan x-\sin x\sim\dfrac{1}{2}x^3(x\to 0)$. 由此可知，在利用等价无穷小求极限时，不能对分子或分母中的某个加项作代换，而应该对分子或分母的整体，或其中的无穷小的因子作等价代换，才不致出错.

【例 1.2-14】 极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}$ 的值等于（　　）.

(A)e　　(B)e^2　　(C)e^{-1}　　(D)e^{-2}

解：$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{2\sec x}\xlongequal{\cos x=t}\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{\frac{2}{t}}=e^2$，

所以应选(B).

【例 1.2-15】 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{2n}}-1)$ 的值等于（　　）.

(A)0　　(B)$\dfrac{1}{2}$　　(C)2　　(D)$+\infty$

解：令 $e^{\frac{1}{2n}}-1=\alpha$，则 $n=\dfrac{1}{2\ln(1+\alpha)}$，当 $n\to\infty$ 时，$\alpha\to 0$，故

$$\lim_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{2n}}-1)=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{2\ln(1+\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{2\ln(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}=\frac{1}{2}，$$

应选(B).

本题也可利用无穷小的等价代换，即 $e^{\frac{1}{2n}}-1\sim\dfrac{1}{2n}(n\to\infty)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{2n}}-1)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}，$$

所以应选(B).

1.2.2 连续

1. 函数的连续性与间断点

(1)函数的连续性

设 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，在此前提下：

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 左连续；

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在 x_0 右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 I 上每一点都连续，则称 $f(x)$ 在该区间上连续. 特别，当 $I=[a,b]$ 时，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，是指 $f(x)$ 在 (a,b) 内每一点处连续，且在 a 处右连续，在 b 处左连续.

(2)函数的间断点

由函数在一点连续的定义可知,函数$f(x)$在一点x_0处连续的条件是:

①$f(x_0)$有定义;

②$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

③$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

若上述条件中任何一条不满足,则$f(x)$在x_0处就不连续,不连续的点就称函数的间断点.间断点分成以下两类.

第一类间断点:x_0是$f(x)$的间断点,但$f(x_0^-)$及$f(x_0^+)$均存在.

第二类间断点:不是第一类的间断点.

在第一类间断点中,若$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$,$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$均存在但不相等,则称这种间断点为跳跃间断点;若$f(x_0^-)$,$f(x_0^+)$均存在而且相等,则称这种间断点为可去间断点.

2. 初等函数的连续性

(1)基本初等函数和初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

(2)初等函数的连续性

一切初等函数在其定义区间内都是连续的,这里的"定义区间"是指包含在定义域内的区间.

注意:关于初等函数连续性的结论,不能表达成"初等函数在其定义域内都是连续的".例如,初等函数$f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16 - x^2} + \sqrt{-x}$,它的定义域$D = [-4, -\pi] \cup \{0\}$,不能说$f(x)$在其定义域$D$上连续,因为0是定义域$D$的孤立点,不符合定义函数连续的前提条件,只能说$f(x)$在其定义区间$[-4, -\pi]$上连续.

3. 闭区间上连续函数的性质

设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则:

①$f(x)$在$[a,b]$上有界(有界性定理);

②$f(x)$在$[a,b]$上必有最大值和最小值(最大值最小值定理);

③当$f(a)f(b) < 0$时,在(a,b)内至少有一点ξ,使得$f(\xi) = 0$(零点定理);

④对介于$f(a) = A$及$f(b) = B$之间的任一数值C,在(a,b)内至少有一点ξ,使得$f(\xi) = C$(介值定理).

【例1.2-16】 设函数

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b, & x \leq 0, \\ \dfrac{\sin ax}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

在$x = 0$处连续,则常数$a(\neq 0)$与b应满足何种关系.

解:$f(x)$在$x = 0$处连续的充要条件

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0).$$

现在 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax^2+b)=b$, $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot a=a$, $f(0)=b$.
故应有 $a=b$.

【例 1.2-17】 $x=0$ 是函数 $\arctan\dfrac{1}{x}$ 的(　　).

(A)第二类间断点　(B)可去间断点　(C)跳跃间断点　(D)连续点

解:因为

$$\lim_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2},\ \lim_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2},$$

$f(0^-)\neq f(0^+)$,故应选(C).

【例 1.2-18】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}, & x\neq0,x\neq\pm1,\\ 0, & x=0,x=\pm1,\end{cases}$

指出 $f(x)$ 的间断点,并说明间断点的类型.

解:这是分段函数,其分段点是 $x=0,x=\pm1$. 对这些点处需讨论函数的左、右极限.

因为 $f(0^-)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{x^2+x}{x(x^2-1)}=1$,

$$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+x}{-x(x^2-1)}=-1,$$

$$f(0^-)\neq f(0^+),$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

又因为 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\infty$,所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点(无穷间断点).

因为 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+x}{|x|(x^2-1)}=\dfrac{1}{2}$, $f(-1)=0$,

$$\lim_{x\to-1}f(x)\neq f(-1),$$

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点(可去间断点).

除 $x=0,\pm1$ 外 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的其余点处均连续.

【例 1.2-19】 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处(　　).

(A)连续　　(B)左连续,且不连续

(C)右连续,且不连续　　(D)既非左连续,也非右连续

解: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}e^{-\frac{1}{x}}=+\infty$,

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}e^{-\frac{1}{x}}=0,$$

$$f(0)=0=f(0^+),$$

故应选(C).

【例 1.2-20】 函数 $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的连续区间是(　　).

(A) $[1,2)\cup(2,+\infty)$　　(B) $(1,2)\cup(2,+\infty)$

(C) $(1,+\infty)$　　　　(D) $[1,+\infty)$

解：$f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$ 的定义域为：$x-1>0, x-1\neq1$，即 $(1,2)\cup(2,+\infty)$.

$(1,2)$ 及 $(2,+\infty)$ 均为 $f(x)$ 的定义区间，又 $f(x)$ 为初等函数，故应选(B).

【例 1.2-21】 方程 $x-\cos x-1=0$ 在下列区间中至少有一个实根的区间是(　　).

(A) $(-\infty,0)$　　(B) $(0,\pi)$　　(C) $(\pi,4)$　　(D) $(4,+\infty)$

解：记 $f(x)=x-\cos x-1$，则 $f(0)=-2<0, f(\pi)=\pi>0$，又 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，由零点定理知，应选(B).

【例 1.2-22】 设 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，则在 (a,b) 内 $f(x)$(　　).

(A) 必有最大值与最小值　　(B) 最大值与最小值中至少有一个

(C) 不可能有最大值和最小值　　(D) 最大值与最小值可能有也可能没有

解：由于 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，而不是在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以不能断定 $f(x)$ 在 (a,b) 内是否有最大值与最小值，因此应选(D).

1.2.3 导数

1. 导数概念

(1) 导数的定义

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，并称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数，记成 $y'\big|_{x=x_0}$，或 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$ 或 $f'(x_0)$.

若 $f(x)$ 在区间 I 内处处可导，则对每一 $x\in I$，都对应一个导数值，这就构成了一个新函数，这个函数叫做函数 $f(x)$ 的导函数(也简称作导数)，记作 y'，或 $\dfrac{dy}{dx}$，或 $f'(x)$.

(2) 导数的几何意义和物理意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，在几何上表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率. 由此可知曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

其中 $y_0=f(x_0)$. 若 $f'(x_0)\neq0$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

导数是描述函数变化率的一个概念，对于函数 $y=f(x)$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 表示函数在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的平均变化率，而导数 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 表示函数在一点 x_0 处的瞬时变化率.

如果沿直线运动的物体在时刻 t 的位置函数是 $s=s(t)$，则导数 $s'(t_0)$ 表示该物体在时刻 t_0 的瞬时速度 $v(t_0)$，即

$$v(t_0)=\frac{ds}{dt}\Big|_{t=t_0}.$$

在物理学中，速度、加速度、角速度、线密度、电流强度、功率等等，都是函数变化率的实例，它们都可用导数来描述.

(3)函数可导性与连续性的关系

若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处必定连续. 反之，若函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处连续，则函数 $f(x)$ 在 x_0 处不一定可导. 例如，函数 $y=\sqrt{x^2}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续，但函数 $y=\sqrt{x^2}$ 在 $x_0=0$ 处不可导.

2. 基本求导公式

①$(C)'=0$　　②$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

③$(\sin x)'=\cos x$　　④$(\cos x)'=-\sin x$

⑤$(\tan x)'=\sec^2 x$　　⑥$(\cot x)'=-\csc^2 x$

⑦$(\sec x)'=\sec x\tan x$　　⑧$(\csc x)'=-\csc x\cot x$

⑨$(a^x)'=a^x\ln a$　　⑩$(e^x)'=e^x$

⑪$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$　　⑫$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$

⑬$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　⑭$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

⑮$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$　　⑯$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

3. 求导法则

(1)函数的和、差、积、商的求导法则

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$ 均可导，则：

①$(u\pm v)'=u'\pm v'$；

②$(Cu)'=Cu'$（C 是常数）；

③$(uv)'=u'v+uv'$；

④$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

(2)反函数的求导法则

若 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $\varphi'(y)\neq0$，则它的反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间 I_x 内也可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}},$$

即 $$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

(3)复合函数的求导法则

设 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 均可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 也可导，且

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \text{或} y'(x)=f'(u)\cdot\varphi'(x).$$

(4)隐函数的求导法则

设方程 $F(x,y)=0$ 确定一个隐函数 $y=y(x)$，F_x、F_y 连续且 $F_y\neq0$，则隐函数 $y=y(x)$ 可

导,且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

注:关于记号 F_x,F_y 参阅偏导数概念及其求法.

(5)由参数方程所确定的函数的求导法则

若函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$$

所确定,且 $x=\varphi(t),y=\psi(t)$ 都可导,$\varphi'(t)\neq 0$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

4. 高阶导数

(1)高阶导数的概念

若函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y'=f'(x)$ 仍可导,则 $y'=f'(x)$ 的导数叫做函数 $y=f(x)$ 的二阶导数,记作 y'' 或 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $f''(x)$.

类似地,有 $y=f(x)$ 的三阶导数 y''',四阶导数 $y^{(4)}$,…….

一般地,$y=f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数 $y^{(n-1)}$ 的导数,叫做 $f(x)$ 的 n 阶导数,记作 $y^{(n)}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$ 或 $f^{(n)}(x)$.

(2)几个常见函数的 n 阶导数公式

$$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$$

$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

(3)高阶导数的求导法则

若 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处有 n 阶导数,则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k u^{(n-k)}v^{(k)},$$

其中后一个公式称为莱布尼兹公式.

若函数 $y=y(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$$

所确定,且 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ 二阶可导, $\varphi'(t)\neq0$,则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{\psi''(t)\cdot\varphi'(t)-\psi'(t)\cdot\varphi''(t)}{\varphi'^2(t)}\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\varphi'^3(t)}.$$

【例 1.2-23】 $y=e^x(\sin x+\cos x)$,求 y'.

解: $y'=(e^x)'(\sin x+\cos x)+e^x(\sin x+\cos x)'$

$$=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x.$$

【例 1.2-24】 $\left(\frac{1}{\arcsin x}\right)'$ 等于(　　).

(A) $-\frac{1}{(\arcsin x)^2}$　(B) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　(C) $-\frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$　(D) $-\frac{\sqrt{1-x^2}}{(\arcsin x)^2}$

解:令 $u=\arcsin x$,按复合函数求导法则,所求导数为 $\left(\frac{1}{u}\right)'(\arcsin x)'$,故应选(C).

【例 1.2-25】 $y=\ln\sin x$,求 $\frac{dy}{dx}$.

解: $\frac{dy}{dx}=(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$

【例 1.2-26】 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$,求 y'.

解: $y=(e^{\sin\frac{1}{x}})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cos\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$

【例 1.2-27】 求方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

解:方法 1. 按复合函数求导法,注意 y 是 x 的函数,方程两边对 x 求导,得

$$1-\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0,$$

于是 $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2-\cos y}.$

方法 2. 按隐函数求导公式

$$F(x,y)=x-y+\frac{1}{2}\sin y,$$

$$F_x=1,F_y=-1+\frac{1}{2}\cos y,$$

于是 $\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{1}{-1+\frac{1}{2}\cos y}=\frac{2}{2-\cos y}.$

【例 1.2-28】 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续,则 $f'(a)$ 等于(　　).

(A) $a\varphi(a)$　(B) $-a\varphi(a)$　(C) $-\varphi(a)$　(D) $\varphi(a)$

解: $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)-0}{x-a}=\varphi(a),$

其中最后一个等式利用了 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续的条件,故应选(D).

【例 1.2-29】 设参数方程 $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t\end{cases}$ 确定了隐函数 $y=y(x)$,则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 等于(　　).

(A) $\frac{1-t^2}{4t}$　　(B) $\frac{1+t^2}{4t}$　　(C) $\frac{t^2-1}{4t^2}$　　(D) $-\frac{1+t^2}{4t^2}$

解:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{1-\frac{1}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{1}{2}t,$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}=\frac{1+t^2}{4t},$$

故应选(B).

【例 1.2-30】 求 $y=\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$ 的导数.

解:两边取对数,得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x-1)+\ln(x-2)-\ln(x-3)-\ln(x-4)].$$

上式两边对 x 求导,得

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right),$$

于是 $$y'=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-4}\right).$$

1.2.4 微分及其应用

1. 微分概念

设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 内有定义,$x_0\in I$,$x_0+\Delta x\in I$. 若函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x),$$

其中 A 是不依赖于 Δx 的常数,则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微分,$A\Delta x$ 叫做 $y=f(x)$ 在点 x_0 相应于自变量增量 Δx 的微分,记作 $\mathrm{d}y$,即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x 的微分称为函数 $y=f(x)$ 的微分,记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$.

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微分的充要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 可导,且当 $f(x)$ 在点 x_0 可导时,其微分一定是

$$\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x,$$

函数的微分是

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x.$$

通常把 Δx 称为自变量的微分,记作 $\mathrm{d}x$,即

$$\mathrm{d}x=\Delta x,$$

于是函数的微分可写成

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x.$$

2. 基本微分公式与微分法则

(1)基本微分公式

$d(x^\mu)=\mu x^{\mu-1}dx$　　$d(\sin x)=\cos x dx$

$d(\cos x)=-\sin x dx$　　$d(\tan x)=\sec^2 x dx$

$d(\cot x)=-\csc^2 x dx$　　$d(\sec x)=\sec x\cdot\tan x dx$

$d(\csc x)=-\csc x\cot x dx$　　$d(a^x)=a^x\ln a dx$

$d(e^x)=e^x dx$　　$d(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}dx$

$d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx$　　$d(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$d(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$　　$d(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}dx$

$d(\operatorname{arccot} x)=-\dfrac{1}{1+x^2}dx$

(2)函数和、差、积、商的微分法则

设函数 $u=u(x)$, $v=v(x)$ 均可微，则

$d(u\pm v)=du\pm dv$,

$d(Cu)=Cdu$,

$d(uv)=vdu+udv$,

$d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{vdu-udv}{v^2}$.

(3)复合函数的微分法则

设 $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$ 均可微，则 $y=f[\varphi(x)]$ 也可微，且

$dy=f'(u)du=f'(u)\cdot\varphi'(x)dx$.

【例 1.2-31】 函数 $y=x^3e^{2x}$ 在 $x=1$ 处的微分是(　　).

(A)$5e^2dx$　　(B)$2e^2dx$　　(C)$3e^2dx$　　(D)e^2dx

解: $dy=(x^3e^{2x})'dx=(3x^2e^{2x}+2x^3e^{2x})dx$,

$dy|_{x=1}=5e^2dx$,

故应选(A).

1.2.5 中值定理与导数的应用

1. 中值定理

(1)罗尔定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

(2)拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，则至少有一点 $\xi\in(a,b)$，使得下式成立

$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

2. 求未定式的值的方法——洛必达法则

(1)未定式$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$的情形

关于$\frac{0}{0}$的情形.

设:①当$x\to a$(或$x\to\infty$)时,$f(x)\to 0$且$F(x)\to 0$;

②在点a的某去心邻域内(或当$|x|>N$时),$f'(x)$及$F'(x)$都存在且$F'(x)\neq 0$;

③ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}$存在(或为无穷大),

则

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

若$\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}$仍属$\frac{0}{0}$型,且$f'(x)$、$F'(x)$满足上述三个条件,则可继续运用洛必达法则,即

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{F'(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{f''(x)}{F''(x)}.$$

对于$\frac{\infty}{\infty}$型,也有相应的洛必达法则,这里不再赘述.

(2)其他形式未定式的情形

其他尚有$0\cdot\infty$、$\infty-\infty$、0^0、1^∞、∞^0型的未定式,它们均可通过变形化成$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$的情形.

如$0\cdot\infty$型可变形成$\frac{0}{\frac{1}{\infty}}$或$\frac{\infty}{\frac{1}{0}}$,$\infty-\infty$型通过通分变形,$0^0$、$1^\infty$、$\infty^0$通过取对数变形.

3. 函数性态的判定

(1)函数单调性的判定

利用一阶导数的符号判定函数的单调性,有以下定理:

定理 设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导:

①如果在(a,b)内$f'(x)>0$,那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加;

②如果在(a,b)内$f'(x)<0$,那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

以上判别法,可简单地用表1.2-1表示.

表1.2-1 用导数符号判定单调性

x	区间I	区间I
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↗	↘

(2)函数极值的判定

定义 设函数$f(x)$在x_0的某邻域$U(x_0)$内有定义,如果对于去心邻域$\mathring{U}(x_0)$内的任一x,有

$f(x) < f(x_0)$（或 $f(x) > f(x_0)$），

那么就称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）.

函数的极大值与极小值统称为函数的极值，使函数取得极值的点称为极值点.

函数的极大值和极小值的概念是局部性的，应与函数在某个区间内的最大值和最小值的概念区分清楚.

关于判定函数取得极值的必要条件，有以下定理.

定理 1 （必要条件）设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

通常称函数的导数等于零的点为函数的驻点. 定理 1 就是说，可导函数的极值点必定是函数的驻点. 但反过来，函数的驻点却不一定是函数的极值点. 关于判定函数取得极值的充分条件，有以下两个定理.

定理 2 （第一充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内可导：

①若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②若 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时，$f'(x)<0$，而 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值；

③若 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$ 时，$f'(x)$ 的符号保持不变，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值.

定理 3 （第二充分条件）设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则：

①当 $f''(x_0)<0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

②当 $f''(x_0)>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值.

定理 2 是利用一阶导数的符号判定函数的极值，简单地可用表 1.2-2 表示.

定理 3 是利用二阶导数的符号判定函数的极值，简单地可用表 1.2-3 表示.

表 1.2-2 用一阶导数判定极值

x	x_0 左侧	x_0	x_0 右侧
$f'(x)$ $f(x)$	−	0 极小值	+
$f'(x)$ $f(x)$	+	0 极大值	−

表 1.2-3 用二阶导数判定极值

x	x_0	x_0
$f'(x)$	0	0
$f''(x)$	−	+
$f(x)$	极大值	极小值

(3) 曲线凹、凸性及其拐点的判定

关于利用函数的二阶导数的符号判定曲线的凹、凸性，有以下定理.

定理 （曲线凹、凸性的判定定理）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数：

①若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

②若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的.

以上判别法，可简单地用表 1.2-4 表示.

表 1.2-4 用二阶导数判定曲线的凹、凸性

x	区间 I	区间 I
$f''(x)$	+	-
$y=f(x)$ 的图形	凹	凸

连续曲线 $y=f(x)$ 上凹弧与凸弧的分界点称为这曲线的拐点. 若 $f''(x_0)=0$ 或 $f''(x_0)$ 不存在,而 $f''(x)$ 在 x_0 的左、右两侧邻近异号,则点 $(x_0,f(x_0))$ 就是曲线的一个拐点.

注意:曲线的拐点 $(x_0,f(x_0))$ 是曲线上的点,不要误以为 x_0 是曲线的拐点,x_0 只是拐点的横坐标.

【例 1.2-32】 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

解:属 $\dfrac{0}{0}$ 型,运用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

【例 1.2-33】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

解:属 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型,运用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0.$$

【例 1.2-34】 求 $\lim\limits_{x\to+0}x^n\ln x(n>0)$.

解:属 $0\cdot\infty$ 型,通过变形化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$,然后运用洛必达法则,得

$$\lim_{x\to+0}x^n\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-n-1}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{x^n}{n}\right)=0.$$

【例 1.2-35】 求 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}$.

解:属 0^0 型,先取对数,求 $\lim\limits_{x\to+0}\sin x\ln x$.

$$\lim_{x\to+0}\sin x\ln x=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2x}}=\lim_{x\to+0}\left(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}\right)=0,$$

于是 $\lim\limits_{x\to+0}x^{\sin x}=\lim\limits_{x\to+0}\exp\{\ln x^{\sin x}\}=\exp\{\lim\limits_{x\to+0}\ln x^{\sin x}\}=\exp\{0\}=1.$

【例 1.2-36】 下列命题中,正确的是(　　).

(A)单调函数的导函数必定为单调函数

(B)设 $f'(x)$ 为单调函数,则 $f(x)$ 也为单调函数

(C)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内只有一个驻点 x_0,则此 x_0 必为 $f(x)$ 的极值点

(D)设 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导且只有一个极值点 x_0,则 $f'(x_0)=0$

解：可导函数的极值点必定是函数的驻点，故选(D).

注意：函数的单调性与导函数的符号有关，但函数的单调性与导函数的单调性却并无关系，故(A)、(B)都不对．又可导函数的极值点必定是函数的驻点，但反之，函数的驻点，未必是它的极值点，如 $y=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有唯一驻点 $x=0$，但 $x=0$ 不是它的极值点，故(C)也不对.

【例 1.2-37】 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内满足 $f'(x)<0$，$f''(x)>0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是(　　).

(A)单调上升且是凹的　　(B)单调下降且是凹的

(C)单调上升且是凸的　　(D)单调下降且是凸的

解：由 $f'(x)<0$ 及函数单调性的判定法，知曲线是单调下降的.

又由 $f''(x)>0$ 及曲线凹、凸性的判定法，知曲线是凹的，故选(B).

【例 1.2-38】 已知函数 $y=f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，若 $f'(x_0)=0(x_0\neq0)$，则(　　).

(A) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(x_0,f(x_0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解：$x=x_0$ 是 $f(x)$ 的驻点，又 $f''(x_0)=\dfrac{1}{x_0}(1-e^{-x_0})>0$，故 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，应选(B).

【例 1.2-39】 函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，a 的值应为(　　).

(A) -2　　(B) 2　　(C) $\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$　　(D) $-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$

解：按可导函数取得极值的必要条件：$f'(x_0)=a\cos x_0+\cos 3x_0=0$，代入 $x_0=\dfrac{\pi}{3}$，便得 $a=2$，故选(B).

【例 1.2-40】 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处(　　).

(A)导数存在，但 $f'(a)\neq0$　　(B)取得极大值

(C)取得极小值　　(D)导数不存在

解：由假设，知 $f(x)-f(a)=(x-a)^2+o((x-a)^2)$，由此可得 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值，且导数存在，$f'(a)=0$，故选(C).

1.2.6 偏导数 全微分

1. 偏导数

(1)偏导数概念

函数 $z=f(x,y)$ 对 x、y 的偏导数依次记作 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$(或 $f_x(x,y)$)，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$(或 $f_y(x,y)$)，它们的定义如下：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}.$$

类似地，可以定义三元函数$f(x,y,z)$的偏导数$f_x(x,y,z)$、$f_y(x,y,z)$、$f_z(x,y,z)$等.

按定义，偏导数的求法仍属一元函数微分法的问题.

(2) 多元复合函数的求导法则

设$u=\varphi(x,y)$、$v=\psi(x,y)$均具有偏导数，而$z=f(u,v)$具有连续偏导数，则复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$的偏导数存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.$$

上面这一求导法则，简称为2×2法则或标准法则. 从这标准法则的公式结构，可得它的特征如下：

①由于函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$有两个自变量，所以法则中包含$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$的两个偏导数公式；

②由于函数的复合结构中有两个中间变量，所以每一偏导数公式都是两项之和，这两项分别含有$\frac{\partial z}{\partial u}$及$\frac{\partial z}{\partial v}$；

③每一项的构成与一元复合函数的求导法则相类似，即"因变量对中间变量的导数再乘以中间变量对自变量的导数".

由此可见，掌握多元复合函数的求导法则的关键是弄清函数的复合结构，哪些是中间变量，哪些是自变量. 为直观地显示变量之间的复合结构，可用结构图（或称树形图）1.2-1来表示出因变量z经过中间变量u、v再通向自变量x、y的各条途径.

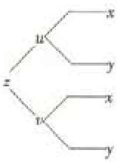

图 1.2-1

按照上述标准法则的三个特征，我们可以将多元复合函数的求导法则推广.

如，特别当$u=\varphi(x)$，$v=\psi(x)$，$z=f(u,v)$时，由于函数$z=f[\varphi(x),\psi(x)]$只有一个自变量，偏导数变成导数（这时称为全导数）；函数复合结构中有两个中间变量，所以全导数公式中是两项之和；每项构成与一元复合函数求导法则类似. 于是，有全导数公式

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

又如，$u=\varphi(x,y)$，$v=\psi(y)$，$z=f(u,v)$，复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$的结构图如图1.2-2所示. 类似地依以上分析，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dy}.$$

(3)隐函数求导法则

设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定一个隐函数 $z=f(x,y)$，函数 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数且 $F_z\neq0$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

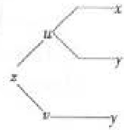

图 1.2-2

(4)高阶偏导数

二阶及二阶以上的偏导数统称高阶偏导数，如 $z=f(x,y)$ 的二阶偏导数按求导次序不同有下列 4 个：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)=f_{xx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)=f_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\right)=f_{yx}(x,y),\qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)=f_{yy}(x,y).$$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 称二阶混合偏导数，当这两个二阶混合偏导数均连续时，有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}.$$

2. 全微分

(1)全微分概念

若函数 $z=f(x,y)$ 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho),$$

其中 A,B 仅与 x,y 有关，而 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，并称 $A\Delta x+B\Delta y$ 为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$，即

$$\mathrm{d}z=A\Delta x+B\Delta y.$$

(2)函数可微分的条件

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分，则偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 必定存在，且全微分

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

函数可微分的充分条件是函数具有连续偏导数.

习惯上，记 $\Delta x=\mathrm{d}x,\Delta y=\mathrm{d}y$，故

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

3. 多元函数连续、可偏导、可微分的关系

对于一元函数来说，函数可导必定连续，而可导与可微分两者是等价的. 但对于多元函数来说，可(偏)导(即存在偏导数)与连续没有必然的联系，可(偏)导与可微分也并不等价. 多元函数可微分必定可(偏)导，但反之不真. 当偏导数存在且连续时，函数必定可微分.

上述多元函数连续、可(偏)导与可微分的关系，可用图 1.2-3 表示.

4. 偏导数的应用

(1)空间曲线的切线与法平面

空间曲线 Γ：

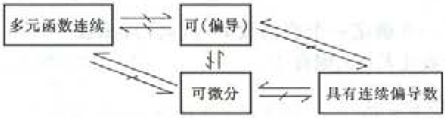

图 1.2-3

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

在对应参数 $t=t_0$ 的点 (x_0,y_0,z_0) 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)},$$

法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

(2)曲面的切平面与法线

曲面 $\Sigma:F(x,y,z)=0$ 在其上一点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0,$$

法线方程是

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

(3)多元函数的极值

定义 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 为 D 的内点. 若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0)\subset D$，使得对于该邻域内异于 P_0 的任何点 $P(x,y)$，都有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值 $f(x_0,y_0)$，点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的极大值点；若对于该邻域内异于 P_0 的任何点 $P(x,y)$，都有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极小值 $f(x_0,y_0)$，点 (x_0,y_0) 称为函数 $f(x,y)$ 的极小值点. 极大值、极小值统称为极值，使得函数取得极值的点称为极值点.

关于判定多元函数取得极值的必要条件、充分条件有以下定理.

定理 1 （必要条件）设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，则它在点 (x_0,y_0) 取得极值的必要条件是

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

定理 2 （充分条件）设 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内具有二阶连续偏导数，且

$$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0, f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C.$$

则有：

①当 $AC-B^2>0$ 时，具有极值 $f(x_0,y_0)$，且当 $A<0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极大值，当 $A>0$ 时，$f(x_0,y_0)$ 为极小值；

②当 $AC-B^2<0$ 时 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(4)条件极值

对函数的自变量具有约束条件的极值问题，称为条件极值问题. 对于有些条件极值问题，可以利用约束条件将问题化为无条件极值问题；一般地，则采用拉格朗日乘数法求解.

拉格朗日乘数法：要求函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点，可先作拉格朗日函数

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

其中 λ 为参数；再解方程组

$$\begin{cases} F_x(x,y)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ F_y(x,y)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

得到 x、y 及 λ，则这样得到的 (x,y) 就是函数 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的可能极值点.

拉格朗日乘数法可推广到自变量多于两个、约束条件多于一个的情形.

(5)多元函数的最大值和最小值

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续、在 D 内可微分且只有有限个驻点. 求 $f(x,y)$ 在 D 上的最大、最小值的一般方法是：

①求 $f(x,y)$ 在 D 内的一切驻点，并计算函数在这些驻点处的函数值；

②求函数 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的最大、最小值；

③将由①、②中所得的函数值进行比较，其中最大的就是最大值，最小的就是最小值.

实际问题中往往可根据问题的性质知道，函数的最大(小)值一定在 D 的内部取得，而函数在 D 内只有一个驻点，则可以肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大(小)值.

【例 1.2-41】 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=6x^2y-9y^2-1.$$

【例 1.2-42】 设 $z=x^2\sin y+e^y\ln x$，求 dz.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y+\dfrac{1}{x}e^y$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y+e^y\ln x$，

$$dz=\left(2x\sin y+\frac{1}{x}e^y\right)dx+(x^2\cos y+e^y\ln x)dy.$$

【例 1.2-43】 设 $z=e^{x-2y}$，$x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

解：$\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cdot\cos t-2e^{x-2y}\cdot 3t^2=e^{\sin t-2t^3}(\cos t-6t^2)$.

【例 1.2-44】 设 $z=e^u\sin v$，$u=xy$，$v=x+y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=e^u\sin v\cdot y+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[y\sin(x+y)+\cos(x+y)]$，

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=e^u\sin v\cdot x+e^u\cos v\cdot 1=e^{xy}[x\sin(x+y)+\cos(x+y)].$$

【例 1.2-45】 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解：设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$，则 $F_x=2x,F_y=2y,F_z=2z-4$. 由隐函数求导法，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{x}{2-z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{y}{2-z}.$$

【例 1.2-46】 下列结论正确的是(　　).

(A) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的充分条件

(B) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是 $f(x,y)$ 的偏导数存在的必要条件

(C) $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的偏导数存在是 $f(x,y)$ 在该点可微分的充分条件

(D) $z=(x,y)$ 在点 (x,y) 连续是 $f(x,y)$ 在该点可微分的必要条件

解：由 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 可微分的定义知，函数在一点可微分必定函数在该点连续，故(D)正确.

本题也可由如下分析得出结论：多元函数存在偏导数与函数连续没有必然联系，故(A)、(B)都不正确；多元函数存在偏导数与函数可微分也并不等价. 由函数可微分可推知函数的偏导数必定存在；但反过来，由函数的偏导数存在，不能得出函数可微分的结论，故(C)也不正确，因此，应选(D).

【例 1.2-47】 求曲线 $x=t,y=t^2,z=t^3$ 在点(1,1,1)处的切线及法平面方程.

解：因 $x_t'=1,y_t'=2t,z_t'=3t^2$，点(1,1,1)所对应的参数 $t=1$，故曲线的切向量 $\tau=(1,2,3)$. 于是，切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3},$$

法平面方程为

$$(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

即 $\quad x+2y+3z-6=0.$

【例 1.2-48】 球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点(1,2,3)处的切平面方程是(　　).

(A) $(x-1)+2(y-2)-(z-3)=0$　(B) $(x+1)+2(y+2)+3(z+3)=0$

(C) $(x-1)+2(y-2)+3(z-3)=0$　(D) $(x+1)+2(y+2)-(z+3)=0$

解：$F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-14$，曲面的法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,2z)$，$\boldsymbol{n}|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$，故曲面在点(1,2,3)处的切平面方程是(C).

【例 1.2-49】 曲面 $z=x^2-y^2$ 在点 $(\sqrt{2},-1,1)$ 处的法线方程是(　　).

(A) $\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{-1}$　　(B) $\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$

(C) $\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{-1}$　　(D) $\frac{x-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$

解：设 $F(x,y,z)=x^2-y^2-z$，则

$$F_x=2x,F_y=-2y,F_z=-1.$$

曲面在点 $(\sqrt{2},-1,1)$ 处的法线的方向向量 $\boldsymbol{s}=(2\sqrt{2},2,-1)$，故选(C).

【例1.2-50】 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值.

解:(1)先求驻点:

$$\begin{cases}f_x=3x^2+6x-9=0,\\ f_y=-3y^2+6y=0,\end{cases}$$

解得驻点(1,0),(1,2),(−3,0),(−3,2).

(2)求二阶偏导数:$f_{xx}=6x+6,f_{xy}=0,f_{yy}=-6y+6$,在点(1,0)处,$AC-B^2=12\cdot6>0$,又$A>0$,故有极小值$f(1,0)=-5$;在点(1,2)处,$AC-B^2=12(-6)<0$,故$f(1,2)$不是极值;在点(−3,0)处,$AC-B^2=-12\cdot6<0$,故$f(-3,0)$不是极值;在点(−3,2)处,$AC-B^2=-12(-6)>0$,又$A<0$,故有极大值$f(-3,2)=31$.

【例1.2-51】 求表面积为a^2而体积为最大的长方体的体积.

解:设长方形的三棱长为x、y、z,则问题就是在条件$\varphi(x,y,z)=2xy+2xz+2yz-a^2=0$下,求函数$V=xyz(x>0,y>0,z>0)$的最大值.

作拉格朗日函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda(2xy+2xz+2yz-a^2),$$

解方程组

$$\begin{cases}F_x=yz+2\lambda(y+z)=0,\\ F_y=xz+2\lambda(x+z)=0,\\ F_z=xy+2\lambda(x+y)=0,\\ \varphi(x,y,z)=2xy+2xz+2yz-a^2=0\end{cases}$$

得$x=y=z=\dfrac{\sqrt6}{6}a$.这是唯一可能的极值点,由于问题本身可知最大值一定存在,所以最大值必在这个可能极值点处取得,即 $V_{\max}=\left(\dfrac{\sqrt6}{6}a\right)^3=\dfrac{\sqrt6}{36}a^3$.

【例1.2-52】 某厂要用铁板做成一个体积为2 m^3的有盖长方体水箱.问当长、宽、高各取怎样的尺寸时,所用材料最省.

解:设水箱的长为x m,宽为y m,则其高为$\dfrac{2}{xy}$ m,此水箱所用材料的面积为

$$A=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right)\quad(x>0,y>0)$$

令 $$\begin{cases}A_x=2\left(y-\dfrac{2}{x^2}\right)=0,\\ A_y=2\left(x-\dfrac{2}{y^2}\right)=0.\end{cases}$$

解这方程组得$x=y=\sqrt[3]{2}$,从而高也为$\sqrt[3]{2}$.由于水箱所用材料面积的最小值一定存在,并在开区域$D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$内部取得,函数在D内只有唯一驻点,故可断定当水箱的长、宽、高均为$\sqrt[3]{2}$ m时,水箱所用材料最省.

1.3 积分学

要求:①理解定积分的概念和几何意义,了解定积分的性质和积分中值定理,掌握积分上

限的函数及其导数和牛顿—莱布尼茨公式.

②理解原函数与不定积分的概念及性质,掌握不定积分的基本公式以及求不定积分、定积分的换元法与分部积分法,掌握有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分,了解有关奇、偶函数在关于原点对称的区间上的定积分的性质.

③掌握科学技术问题中建立定积分表达式的元素法,会建立某些简单几何量的积分表达式.

④了解两类广义积分及其收敛性的概念.

⑤理解二重积分的概念,掌握二重积分的计算方法.了解三重积分的概念,会计算简单的三重积分,了解三重积分的性质.

⑥理解两类曲线积分的概念,了解两类曲线积分的性质,会计算两类曲线积分.

⑦了解科学技术问题中建立重积分与曲线积分表达式的元素法,会建立某些简单的几何量与物理量的积分表达式.

1.3.1 不定积分与定积分

1. 不定积分、定积分的概念与性质

(1)不定积分的概念与性质

若在区间 I 内,$F'(x)=f(x)$,则称函数 $F(x)$ 为函数 $f(x)$ 在区间 I 内的原函数,而函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数 $F(x)+C$ 称为函数 $f(x)$ 在区间 I 内的不定积分,记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

不定积分具有如下性质:

① $\int [f(x) \pm g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x \pm \int g(x)\mathrm{d}x$.

② $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$($k$ 是非零常数).

(2)定积分的概念与性质

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界,将 $[a,b]$ 任意划分成 n 个小区间

$$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n] \quad (x_0=a,x_n=b),$$

任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$($i=1,\cdots,n$),记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\cdots,\Delta x_n\}$. 若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

总存在(即极限不依赖于对 $[a,b]$ 的分法与 ξ_i 的取法),则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积,并称上述极限为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分,记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

对定积分还有两点补充规定:

①当 $a=b$ 时,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$.

②当 $a>b$ 时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$.

在 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$ 时，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 在几何上表示由曲线 $y=f(x)$、两条直线 $x=a$，$x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积.

定积分具有如下性质：

① $\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

② $\int_a^b kf(x)\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$（$k$ 为常数）.

③ $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.

④ $\int_a^b \mathrm{d}x = b-a$.

⑤若在区间 $[a,b]$ 上，$f(x)\leq g(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \quad (a<b).$$

⑥ $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\,(a<b)$.

⑦设 M,m 分别是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大、最小值，则 $m(b-a)\leq \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq M(b-a)$ $(a<b)$.

⑧（定积分中值定理）设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

2. 微积分基本公式（牛顿—莱布尼茨公式）

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$x\in[a,b]$，则称 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 为上限函数.

记 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[a,b]$，则 $F'(x)=f(x)$，即 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数. 这表明连续函数 $f(x)$ 的原函数一定存在，且可表示为 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

一般地，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x).$$

由以上结果，可得微积分基本公式：

若在 $[a,b]$ 上有 $F'(x)=f(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$$

这个公式揭示了定积分与被积函数的原函数或不定积分之间的联系，给定积分提供了一个有效而简便的计算方法.

3. 积分法

1)基本积分表

① $\int k\mathrm{d}x = kx + C$($k$ 是常数).

② $\int x^{\mu}\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + C(\mu \neq -1)$.

③ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$.

④ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$.

⑤ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

⑥ $\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x + C$.

⑦ $\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x + C$.

⑧ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 \mathrm{d}x = \tan x + C$.

⑨ $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$.

⑩ $\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$.

⑪ $\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

⑫ $\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$.

⑬ $\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

⑭ $\int \operatorname{sh} x\mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$.

⑮ $\int \operatorname{ch} x\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$.

⑯ $\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$.

⑰ $\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$.

2)换元积分法

对不定积分,有第一类换元法和第二类换元法.

(1)第一类换元法

设函数 $f(u)$ 有原函数,$u=\varphi(x)$ 可导,则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 }\varphi(x)=u} \left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}.$$

第一类换元法也叫凑微分法,能否熟练地凑微分,是求不定积分的重要技巧之一. 下面列

出了一些常见的凑微分的形式：

① $f(ax+b)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a}f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b)\ (a\neq 0)$.

② $f(x^n)x^{n-1}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n}f(x^n)\mathrm{d}x^n$, $f(\sqrt{x})\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2f(\sqrt{x})\mathrm{d}\sqrt{x}$.

③ $f(\ln x)\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=f(\ln x)\mathrm{d}\ln x$.

④ $f(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x$.

⑤ $f(\sin x)\cos x\mathrm{d}x=f(\sin x)\mathrm{d}\sin x$.

⑥ $f(\cos x)\sin x\mathrm{d}x=-f(\cos x)\mathrm{d}\cos x$.

⑦ $f(\tan x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=f(\tan x)\mathrm{d}\tan x$.

⑧ $f(\cot x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-f(\cot x)\mathrm{d}\cot x$.

⑨ $f(\arcsin x)\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=f(\arcsin x)\mathrm{d}\arcsin x$.

⑩ $f\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=f\left(\arcsin\dfrac{x}{a}\right)\mathrm{d}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

(2) 第二类换元法

设 $x=\psi(t)$ 是单调的可导函数，且 $\psi'(t)\neq 0$，又设 $f[\psi(t)]\psi'(t)$ 有原函数，则有

$$\int f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{令 } x=\psi(t)} \left[\int f[\psi(t)]\psi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)},$$

其中 $t=\psi^{-1}(x)$ 是 $x=\psi(t)$ 的反函数.

第二类换元法，常用的代换有：三角代换、倒代换. 如果被积函数含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，$\sqrt{x^2+a^2}$，$\sqrt{x^2-a^2}$，可以依次作代换 $x=a\sin t$，$x=a\tan t$，$x=a\sec t$ 用来化去根式，即

$$\sqrt{a^2-x^2}\xlongequal{x=a\sin t}a\cos t,$$

$$\sqrt{x^2+a^2}\xlongequal{x=a\tan t}a\sec t,$$

$$\sqrt{x^2-a^2}\xlongequal{x=a\sec t}a\tan t,$$

以上各式中，均假设 $a>0$.

倒代换主要用于消去被积函数的分母中的变量因子 x.

(3) 定积分换元法

对定积分，有定积分换元法.

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件：

① $\varphi(\alpha)=a$，$\psi(\beta)=b$；

② $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\varphi\subset[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{x=\varphi(t)}\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

对定积分的换元法有两点值得注意：

①用 $x=\varphi(t)$ 把原来变量 x 代换成新变量 t 时，积分限也要换成相应于新变量 t 的积分限；

②求出 $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ 的一个原函数 $\Phi(t)$ 后，不必像计算不定积分那样，再要把 $\Phi(t)$ 变换成原来变量 x 的函数，而只要把新变量 t 的上、下限分别代入 $\Phi(t)$ 中，然后相减就行了.

利用定积分的换元法，可得有关奇、偶函数在关于原点对称的区间上的积分的下述性质.

性质 1 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 2 若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

利用定积分的换元法，可得下面的重要公式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为大于 1 的正奇数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为正偶数}. \end{cases}$$

3) 分部积分法

对不定积分，有

$$\int u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

对定积分，有

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x).$$

如果求积分 $\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ 有困难，而求积分 $\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$ 比较容易，那么利用分部积分公式，就能起到使积分化难为易的作用.

应用分部积分时，恰当选取 $u(x)$ 和 $\mathrm{d}v(x)$ 是一个关键. 选取 $u(x)$ 和 $\mathrm{d}v(x)$ 一般要考虑下面两点：

①$v(x)$ 要容易求得；

② $\int v(x)\,\mathrm{d}u(x)$ 要比 $\int u(x)\,\mathrm{d}v(x)$ 容易积出.

分部积分法主要用于被积函数是两个不同类型的函数乘积的积分，特别在下列三种情形下一般采用分部积分.

①被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就可考虑用分部积分法，并设对数函数或反三角函数为 $u(x)$.

②被积函数是幂函数和正(余)弦函数或幂函数和指数函数的乘积，就可考虑用分部积分法，并设幂函数为 $u(x)$.

③被积函数为三角函数与指数函数的乘积，可连续进行两次分部积分，均设三角函数为 $u(x)$，得到一个所求积分满足的恒等式，从而求得积分.

为便于记忆和运用，关于分部积分法选 $u(x)$ 的顺序可归纳为："对、反、幂、三、指".

4) 有理函数、三角函数的有理式和简单无理函数的积分

有理函数是指具有如下形式的函数：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m},$$

其中 $a_0\neq0,b_0\neq0$. 当 $n<m$ 时,称为真分式;当 $n\geqslant m$ 时,称为假分式. 假分式可化成一个多项式与一个真分式之和.

有理函数积分的关键步骤是将真分式分解成部分分式之和,其分解方法如下:

设 $Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}$,其中 $p^2-4q<0,\cdots,r^2-4s<0$,则真分式

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)}=&\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\cdots+\frac{A_{\alpha}}{x-a}+\cdots+\frac{B_1}{(x-b)^{\beta}}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots+\frac{B_{\beta}}{x-b}\\&+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\lambda}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{\lambda-1}}+\cdots+\frac{M_{\lambda}x+N_{\lambda}}{x^2+px+q}+\cdots\\&+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^{\mu}}+\frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^{\mu-1}}+\cdots+\frac{R_{\mu}x+S_{\mu}}{x^2+rx+s},\end{aligned}$$

其中 $A_i,\cdots,B_i,M_i,N_i,\cdots,R_i,S_i$ 等均为常数,其确定方法有以下两种.

方法一:等式两端去分母,比较等式两端 x 的同次幂的系数使之分别相等,将得出的等式求解.

方法二:在等式两端分别代入一些特殊的 x 值,得出若干个等式,然后将得出的等式求解.

三角函数有理式通过诱导公式都可化成 $\sin x$、$\cos x$ 的有理式,记作 $R(\sin x,\cos x)$. 作变换 $u=\tan\frac{x}{2}$,则

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

从而 $$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u,$$

即通过变换 $u=\tan\frac{x}{2}$,这种积分总可化为 u 的有理函数的积分,然后用有理函数的积分方法求解. 但要注意,有时这种方法不一定简捷.

对于被积函数为 $R(x,\sqrt[n]{ax+b})$ 及 $R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}\right)$ 这两类函数的积分(其中 $R(x,u)$ 表示 x、u 的有理函数),可分别作变换:令 $\sqrt[n]{ax+b}=u$ 及 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+h}}=u$,去掉根号,原积分就化为有理函数的积分.

【例 1.3-1】 求 $\int 2\cos 2x\mathrm{d}x$.

解：令 $2x=u$，得

$$\int 2\cos 2x\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}(2x) = \int \cos u\mathrm{d}u = \sin u + C = \sin 2x + C,$$

或

$$\int 2\cos 2x\mathrm{d}x = \int \cos 2x\mathrm{d}(2x) = \sin 2x + C.$$

【例 1.3-2】 求 $\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x$.

解：$\int \frac{1}{3+2x}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3+2x}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}(3+2x) = \frac{1}{2}\ln|3+2x| + C.$

一般地，

$$\int f(ax+b)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a}f(ax+b)\mathrm{d}(ax+b) = \frac{1}{a}\left[\int f(u)\mathrm{d}u\right]_{u=ax+b}\ (a\neq 0).$$

【例 1.3-3】 求 $\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x$.

解：$\int 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \int e^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = e^{x^2} + C.$

【例 1.3-4】 求 $\int \tan x\mathrm{d}x$.

解：$\int \tan x\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C.$

【例 1.3-5】 求 $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x\ (a>0)$.

解：令 $x=a\sin t$，则 $\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x &= \int a\cos t\cdot a\cos t\mathrm{d}t = a^2\int \cos^2 t\mathrm{d}t\\ &= a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\mathrm{d}t = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C.\end{aligned}$$

由 $x=a\sin t$，得

$$t=\arcsin\frac{x}{a},\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

【例 1.3-6】 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\ (a>0)$.

解：令 $x=a\tan t$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\mathrm{d}t = \int \sec t\,\mathrm{d}t = \ln|\sec t+\tan t| + C.$$

由 $\tan t=\frac{x}{a}$，得 $\sec t=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$，由于 $\sec t+\tan t>0$，故

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)+C = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C_1,$$

其中 $C_1=C-\ln a$.

【例 1.3-7】 求 $\int x\ln x\mathrm{d}x$.

解：设 $u=\ln x,\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x},v=\frac{x^2}{2}$. 利用分部积分公式，得

$$\int x\ln x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{2}\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C.$$

【例 1.3-8】 求 $\int x\arctan x\mathrm{d}x$.

解：设 $u=\arctan x,\mathrm{d}v=x\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2},v=\frac{x^2}{2}$. 利用分部积分公式，得

$$\int x\arctan x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{x^2}{2}\arctan x-\frac{1}{2}(x-\arctan x)+C.$$

【例 1.3-9】 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin x\mathrm{d}x$.

解：设 $\cos x=t$，则 $\mathrm{d}t=-\sin x\mathrm{d}x$，且当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$t=0$. 于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5x\sin x\mathrm{d}x=-\int_1^0t^5\mathrm{d}t=\int_0^1t^5\mathrm{d}t=\left[\frac{t^6}{6}\right]_0^1=\frac{1}{6}.$$

【例 1.3-10】 计算 $\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x$.

解：设 $u=\arcsin x,\mathrm{d}v=\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}},v=x$. 代入分部积分公式，得

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\arcsin x\mathrm{d}x=[x\arcsin x]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}(1-x^2)$$

$$=\frac{\pi}{12}+[\sqrt{1-x^2}]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}-1.$$

【例 1.3-11】 计算 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解：设 $\sqrt{2x+1}=t$，则 $x=\frac{t^2-1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，且当 $x=0$ 时，$t=1$；当 $x=4$ 时，$t=3$. 于是

$$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3\frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+3t\right]_1^3=\frac{22}{3}.$$

【例 1.3-12】 已知 $f'(x)=\sec^2x+\sin 2x$，且 $f(0)=\frac{3}{2}$，则 $f(x)$ 等于（　　）.

(A) $\tan x+\cos 2x+\frac{1}{2}$　　(B) $\tan x-\cos 2x+\frac{5}{2}$

(C) $\tan x-\frac{1}{2}\cos 2x+2$　　(D) $\tan x+\frac{1}{2}\cos 2x+1$

解：$f(x)=\int(\sec^2 x+\sin 2x)\mathrm{d}x=\tan x-\frac{1}{2}\cos 2x+C.$

由 $f(0)=\frac{3}{2}$，得

$$-\frac{1}{2}+C=\frac{3}{2},C=2,$$

故选(C).

【例 1.3-13】 $\int\sin^3 x\mathrm{d}x$ 等于(　　).

(A) $\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$　　(B) $\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

(C) $-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C$　　(D) $-\cos x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

解：$\int\sin^3 x\mathrm{d}x=\int(\cos^2 x-1)\mathrm{d}\cos x=\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C,$

故选(C).

【例 1.3-14】 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}$.

解：设 $\frac{1}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{A}{1+2x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$,

其中 A、B、C 为待定常数，其确定方法有

方法一：两端去分母，得

$$A(1+x^2)+(Bx+C)(1+2x)=1,$$

即 $$(A+2B)x^2+(2C+B)x+(A+C)=1.$$

比较 x 的同次幂系数，得

$$A+2B=0,B+2C=0,A+C=1,$$

解得 $$A=\frac{4}{5},B=-\frac{2}{5},C=\frac{1}{5}.$$

方法二：两端去分母后，

令 $x=0$，得 $A+C=1$,

$x=-\frac{1}{2}$，得 $\frac{5}{4}A=1$,

$x=-1$，得 $2A+B-C=1$.

解得相同的 A、B、C 的值.

于是 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+2x)(1+x^2)}=\frac{4}{5}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2x}+\int\frac{-\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{5}\ln\frac{(1+2x)^2}{1+x^2}+\frac{1}{5}\arctan x+C.$$

【例1.3-15】 求$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

解:令$u=\tan\frac{x}{2}$,则$\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$,$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$,$dx=\frac{2}{1+u^2}du$,于是

$$\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx=\int \frac{\left(1+\frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}\left(1+\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}du=\frac{1}{2}\int\left(u+2+\frac{1}{u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{u^2}{2}+2u+\ln|u|\right)+C=\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C.$$

【例1.3-16】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$等于(　　).

(A)$\frac{1}{4}$　　(B)$\frac{1}{3}$　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)1

解:利用洛必达法则及积分上限函数的导数公式,得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2}=\frac{1}{3},$$

故选(B).

【例1.3-17】 设$I=\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx$,则估计$I$值的大致范围为(　　).

(A)$0\leqslant I\leqslant\frac{\sqrt{2}}{10}$　　(B)$\frac{\sqrt{2}}{10}\leqslant I\leqslant\frac{1}{5}$　　(C)$\frac{1}{5}<I<1$　　(D)$I\geqslant 1$

解:因为$\frac{1}{\sqrt{2}}x^4\leqslant\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}\leqslant x^4$　$(0\leqslant x\leqslant 1)$,所以

$$\frac{\sqrt{2}}{10}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2}}x^4dx\leqslant\int_0^1\frac{x^4}{\sqrt{1+x}}dx\leqslant\int_0^1 x^4dx=\frac{1}{5},$$

故选(B).

【例1.3-18】 下列等式中,错误的是(　　).

(A) $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$,其中$f(x)$在$[-a,a](a>0)$上连续

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{10}xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{10}xdx$

(C) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin 5x\cos 7xdx=0$

(D) $\int_0^{\pi}\sin^9 xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 xdx$

解:(B)、(C)、(D)三个等式都是正确的. 事实上我们有以下更一般的结论:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cos nx\mathrm{d}x = 0(m,n = 1,2,3,\cdots),$$

$$\int_0^{\pi} \sin^n x\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x(n = 1,2,3,\cdots).$$

而等式(A)当$f(x)$为偶函数时成立,一般情形下未必成立,故选(A).

1.3.2 广义积分

1. 无穷限的广义积分

若极限

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称此极限为$f(x)$在$[a,+\infty]$上的广义积分,记作$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

这时,称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$收敛;若上述极限不存在,则称广义积分$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$不收敛或发散.

类似地定义广义积分

$$\int_{-\infty}^{b}f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x.$$

当且仅当广义积分

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x \text{ 与 } \int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

都收敛时,定义广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0}f(x)\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

由定义,易知广义积分$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}(a>0)$当$p>1$时收敛,当$p\leqslant1$时发散.

2. 无界函数的广义积分

若$f(x)$在$(a,b]$上连续,而在点a的右邻域内无界,极限

$$\lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称此极限为$f(x)$在$(a,b]$上的广义积分,记作$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x,$$

这时,称广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$收敛.

若$f(x)$在$[a,b)$上连续,而在点b的左邻域内无界,类似地定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x.$$

由定义,易知广义积分$\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q}$当$q<1$时收敛,当$q\geqslant1$时发散.

【例 1.3-19】 计算 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解：$\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{t\to-\infty}\int_{t}^{0}\frac{dx}{1+x^2}=\lim\limits_{t\to-\infty}[\arctan x]_t^0=0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$,

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{t\to+\infty}[\arctan x]_0^t=\frac{\pi}{2}-0=\frac{\pi}{2},$$

于是

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi.$$

【例 1.3-20】 计算 $\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$.

解：因为 $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}=+\infty$，所以所求积分属无界函数的广义积分. 按定义

$$\int_0^a\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{t\to a^-}\int_0^t\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\lim_{t\to a^-}\left[\arcsin\frac{x}{a}\right]_0^t=\lim_{t\to a^-}\left(\arcsin\frac{t}{a}-0\right)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

【例 1.3-21】 广义积分 $I=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 等于（　　）.

(A) $\frac{\pi}{2}$　　(B) $\frac{\pi}{3}$　　(C) $\frac{\pi}{4}$　　(D) ∞

解：$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}$，故选(A).

【例 1.3-22】 广义积分 $I=\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 等于（　　）.

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) $-\frac{1}{2}$　　(C) 1　　(D) -1

解：$\int_0^1\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=1$，故选(C).

【例 1.3-23】 设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则（　　）.

(A) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 必收敛

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

(C) 当 $\lim\limits_{a\to+\infty}\int_{-a}^{a}f(x)dx$ 存在时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

(D) 当且仅当 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx$ 及 $\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0 f(x)dx$ 均存在时，有 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛

解：按广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$$

收敛的定义，应选(D)，其余结论都不正确.

【例 1.3-24】 下列广义积分中收敛的是(　　).

(A) $\int_{e}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$　(B) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln x}$　(C) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}$　(D) $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

解: $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\int_{e}^{+\infty}\frac{d\ln x}{(\ln x)^2}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_{e}^{+\infty}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}+1=0+1=1$,

易知其他三个积分发散,故选(C).

【例 1.3-25】 设 $I=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}dx$,则 I 的值为(　　).

(A) -1　(B) $-\frac{1}{2}$　(C) $\frac{1}{2}$　(D) $+\infty$

解: $I=\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{2}$,故选(C).

【例 1.3-26】 下列结论中,错误的是(　　).

(A) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 收敛　(B) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 收敛　(C) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 发散　(D) $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$ 收敛

解:在积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 中,$x=0$ 是被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 的无穷间断点,而积分 $\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ 与 $\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 均发散,故积分 $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ 也发散,应选(A).

1.3.3 定积分的应用

1. 平面图形的面积

(1)直角坐标情形

设平面图形由曲线 $y=f(x)$,$y=g(x)$ $(f(x)\geqslant g(x))$ 和直线 $x=a$,$x=b$ 所围成(图 1.3-1),则其面积

$$A=\int_{a}^{b}[f(x)-g(x)]dx.$$

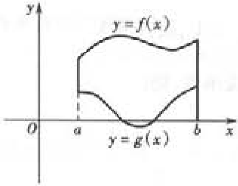

图 1.3-1

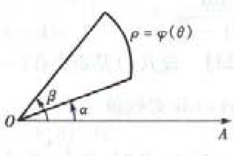

图 1.3-2

(2)极坐标情形

设平面图形由曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha$,$\theta=\beta$ 所围成(图 1.3-2),则其面积

$$A=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi(\theta)]^2d\theta.$$

2. 旋转体的体积

设旋转体由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$,$x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周而

成(图1.3-3),则其体积

$$V=\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx.$$

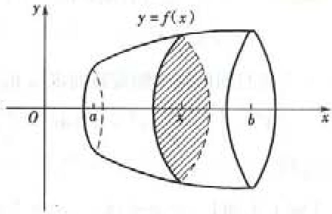

图 1.3-3

3. 平面曲线的弧长

(1)直角坐标情形

设曲线的方程为 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有一阶连续导数,则其弧长

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

(2)参数方程情形

设曲线的参数方程为 $x=\varphi(t),y=\psi(t)(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$,$\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数,则其弧长

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,dt.$$

(3)极坐标情形

设曲线的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$,$\rho(\theta)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有连续导数,则其弧长

$$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,d\theta.$$

【例 1.3-27】 计算由两条抛物线:$y^2=x,y=x^2$ 所围成的图形的面积.

解:两条抛物线所围成的图形如图 1.3-4 所示,x 的变化区间为 $[0,1]$,所求面积为

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

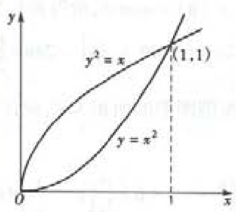

图 1.3-4

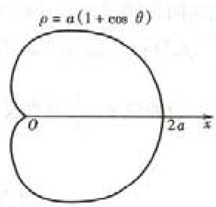

图 1.3-5

【例 1.3-28】 计算心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 所围成的图形的面积.

解:心形线所围成的图形如图 1.3-5 所示,θ 的变化区间为 $[-\pi,\pi]$. 所求面积为

$$A=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2d\theta=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{3}{2}+2\cos\theta+\frac{1}{2}\cos 2\theta\right)d\theta=\frac{a^2}{2}\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{3}{2}\pi a^2.$$

【例 1.3-29】 计算由椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 所围成的图形绕 x 轴旋转而成的旋转椭球体的体积为(　　).

(A) $\frac{4}{3}\pi ab$　　(B) $\frac{2}{3}\pi ab^2$　　(C) $\frac{4}{3}\pi ab^2$　　(D) $\frac{4}{3}\pi a^2b$

解：这个旋转体也可看做是由半个椭圆

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

及 x 轴围成的图形绕 x 轴旋转而成. x 的变化区间为 $[-a,a]$，所求体积为

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{\pi b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi ab^2,$$

故应选(C).

【例 1.3-30】 求悬链线 $y=c\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{c}$ 介于 $x=-b$ 与 $x=b$ 之间的一段弧的长度.

解：x 的变化区间为 $[-b,b]$，$y'=\mathrm{sh}\,\frac{x}{c}$，从而所求弧长为

$$s=\int_{-b}^{b}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_{-b}^{b}\mathrm{ch}\,\frac{x}{c}\mathrm{d}x=c\left[\mathrm{sh}\,\frac{x}{c}\right]_{-b}^{b}=2c\,\mathrm{sh}\,\frac{b}{c}.$$

【例 1.3-31】 计算摆线 $x=a(\theta-\sin\theta)$，$y=a(1-\cos\theta)$ 的一拱 $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$（图 1.3-6）的长度.

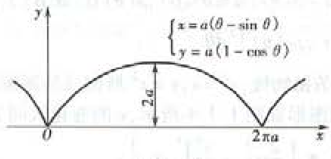

图 1.3-6

解：θ 的变化区间为 $[0,2\pi]$，$x'(\theta)=a(1-\cos\theta)$，$y'(\theta)=a\sin\theta$，所以弧长为

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=8a.$$

【例 1.3-32】 设曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$ 所围图形的面积为 A，则计算 A 的积分表达式为(　　).

(A) $\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}$　　(B) $\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

(C) $\int_1^2\left(\frac{1}{x}-x\right)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_1^2 x\mathrm{d}x$

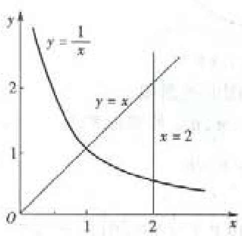

图 1.3-7

解：三条曲线 $y=\frac{1}{x}$、$y=x$ 及 $x=2$ 所围成的图形如图 1.3-7 所示，故所求面积

$$A=\int_1^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x,$$

应选(B).

1.3.4 重积分

1. 重积分的概念与性质

(1) 二重积分的概念与性质

设 $f(x,y)$ 在平面有界闭区域 D 上有界，将闭区域 D 任意划分成 n 个小闭区域

$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$,

任取点$(\xi_i,\eta_i)\in\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$. 记小区域$\Delta\sigma_i$的直径为$d_i$,$\lambda=\max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$.

若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

总存在,则称此极限为函数$f(x,y)$在有界闭区域D上的二重积分,记成$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,即

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

当$f(x,y)\geqslant 0,(x,y)\in D$时,二重积分$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$在几何上表示以曲面$z=f(x,y)$为顶、闭区域$D$为底的曲顶柱体的体积.

二重积分具有如下性质:

① $\iint\limits_D[f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$;

② $\iint\limits_D kf(x,y)\mathrm{d}\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$($k$为常数);

③ $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$,

其中$D=D_1\cup D_2$,且$D_1\cap D_2$无内点;

④ $\iint\limits_D 1\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D\mathrm{d}\sigma=\sigma$,

其中σ为D的面积;

⑤ 若在D上,$f(x,y)\leqslant g(x,y)$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma;$$

⑥ $\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right|\leqslant\iint\limits_D|f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$;

⑦ 设M,m分别是$f(x,y)$在D上的最大、最小值,σ是D的面积,则

$$m\sigma\leqslant\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\leqslant M\sigma;$$

⑧ 设$f(x,y)$在闭区域D上连续,σ是D的面积,则存在点$(\xi,\eta)\in D$,使得

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta)\sigma.$$

(2)三重积分的概念与性质

设$f(x,y,z)$在空间有界闭区域Ω上有界,与二重积分的定义类似地有$f(x,y,z)$在Ω上的三重积分的定义,即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i.$$

若$f(x,y,z)$表示某物体在点(x,y,z)处的密度,Ω表示该物体占有的空间区域,则三重积

分 $\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$ 就表示该物体的质量 M，即

$$M=\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v.$$

三重积分具有与二重积分类似的性质.

2. 重积分的计算法

1）二重积分的计算法

（1）利用直角坐标

在直角坐标下，二重积分也表示成 $\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 若积分区域 D（图 1.3-8）可表示成

$$D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\leqslant y\leqslant \varphi_2(x),x\in[a,b]\},$$

则二重积分可化成先对 y、后对 x 的二次积分，即

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

或记成

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

若积分区域 D（图 1.3-9）可表示成

$$D=\{(x,y)\mid \psi_1(y)\leqslant x\leqslant \psi_2(y),y\in[c,d]\},$$

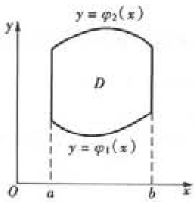

图 1.3-8

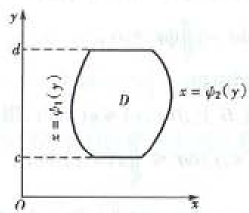

图 1.3-9

则二重积分可化成先对 x、后对 y 的二次积分，即

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

图 1.3-8 所示的积分区域称为 X－型区域，图 1.3-9 所示的积分区域称为 Y－型区域. 若积分区域既是 X－型的，也是 Y－型的，则二重积分可表成两个不同次序的二次积分，于是有

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

在化二重积分为二次积分时，为了计算简便，需要选择恰当的二次积分的次序. 这时，既要考虑积分区域 D 的形状，又要考虑被积函数 $f(x,y)$ 的特性. 现以下例说明.

计算积分 $\iint\limits_{D} y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由直线 $y=x,x=-1$ 和 $y=1$ 所围成的闭区域.

积分区域 D 既是 X－型，又是 Y－型的. 若积分化为先对 y、后对 x 的二次积分，则有

$$\begin{aligned}\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_{-1}^{1}\Big[\int_x^1 y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}\Big[-\frac{1}{2}\int_x^1\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}(1+x^2-y^2)\Big]\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\big[(1+x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\big]_x^1\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{3}\int_{-1}^{1}(|x|^3-1)\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{2}{3}\int_0^1(x^3-1)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

若积分化为先对 x、后对 y 的二次积分，则有

$$\iint_D y\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{-1}^{1}y\Big[\int_{-1}^{y}\sqrt{1+x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}y.$$

其中关于 x 的积分计算比较麻烦，所以，这里选择先对 y、后对 x 的二次积分，计算较为方便.

在二重积分的计算中，利用积分区域的对称性及被积函数相关的奇偶性，可以简化二重积分的计算. 这里要注意区域的对称性与被积函数的奇偶性要相关. 常见的有以下几种情形（以下假设 $f(x,y)$ 在积分区域 D 上连续，并记 $I=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$）.

①如果积分区域 D 关于 y 轴对称，那么相关的函数奇偶性是关于变量 x 的.

当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时（此时称 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数），$I=0$；

当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时（此时称 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数），$I=2\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_1=\{(x,y)\in D,x\geqslant 0\}$.

②如果积分区域 D 关于 x 轴对称，那么相关的函数奇偶性是关于变量 y 的.

当 $f(x,-y)=-f(x,y)$ 时（此时称 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数），$I=0$；

当 $f(x,-y)=f(x,y)$ 时（此时称 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数），$I=2\iint_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 $D_2=\{(x,y)\in D,y\geqslant 0\}$.

③如果积分区域 D 关于原点 O 对称，那么相关的奇偶性是关于变量 x,y 的.

当 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 时，$I=0$；

当 $f(-x,-y)=f(x,y)$ 时，$I=2\iint_{D_1}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=2\iint_{D_2}f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$.

(2) 利用极坐标

有些二重积分，积分区域 D 的边界曲线用极坐标方程来表示比较方便，且被积函数用极坐标 ρ,θ 表达比较简单. 这时，就可以考虑利用极坐标来计算二重积分.

直角坐标和极坐标的关系是

$$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta.$$

积分的变换公式是

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta.$$

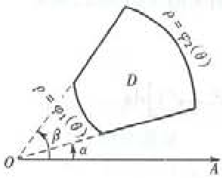

图 1.3-10

若积分区域 D(图 1.3-10)可表示成

$$D=\{(\rho,\theta)\mid\varphi_1(\theta)\leqslant\rho\leqslant\varphi_2(\theta),\theta\in[\alpha,\beta]\},$$

则二重积分可化成先对 ρ、后对 θ 的二次积分,即

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho,$$

特别,当 $\varphi_1(\theta)\equiv0,\varphi_2(\theta)=\varphi(\theta)$ 时,有

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\mathrm{d}\theta\int_0^{\varphi(\theta)}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho.$$

2)三重积分的计算法

(1)利用直角坐标

在直角坐标下,三重积分可表示成 $\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 若空间闭区域 Ω 可表示成

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\leqslant z\leqslant z_2(x,y),(x,y)\in D\},$$

则三重积分可化成先对 z 的积分,然后再在 D 上作二重积分,即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_D\left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对二重积分再化为二次积分,从而三重积分化为三次积分计算.

若空间闭区域 Ω 可表示成

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D_z,c_1\leqslant z\leqslant c_2\},$$

则三重积分可化为先计算一个二重积分、再计算一个定积分,即

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v=\int_{c_1}^{c_2}\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(2)利用柱面坐标

直角坐标和柱面坐标的关系是

$$x=\rho\cos\theta,y=\rho\sin\theta,z=z.$$

积分的变换公式是

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_\Omega F(\rho,\theta,z)\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

其中 $F(\rho,\theta,z)=f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)$.

化为柱面坐标后的三重积分可化为三次积分计算.

(3)利用球面坐标

直角坐标和球面坐标的关系是

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta,y=\rho\sin\varphi\sin\theta,z=\rho\cos\varphi.$$

积分的变换公式是

$$\iiint\limits_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_\Omega F(\rho,\varphi,\theta)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta,$$

其中 $F(\rho,\varphi,\theta)=f(\rho\sin\varphi\cos\theta,\rho\sin\varphi\sin\theta,\rho\cos\varphi)$.

【例 1.3-33】 计算 $\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由抛物线 $y^2=x$ 及直线 $y=x-2$ 所围成的闭区域.

解：两曲线的交点是 $(1,-1)$ 和 $(4,2)$. 积分区域 D（图 1.3-11）可表示成

$$D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant y+2,y\in[-1,2]\}.$$

从而

$$\iint\limits_D xy\mathrm{d}\sigma=\int_{-1}^{2}\left[\int_{y^2}^{y+2}xy\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_{-1}^{2}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{y^2}^{y+2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{2}[y(y+2)^2-y^5]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^4}{4}+\frac{4}{3}y^3+2y^2-\frac{y^6}{6}\right]_{-1}^{2}=5\frac{5}{8}.$$

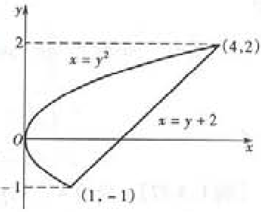

图 1.3-11

【例 1.3-34】 计算 $\iint\limits_D 3x^2y^2\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是 x 轴，y 轴和抛物线 $y=1-x^2$ 所围成的在第一象限内的闭区域.

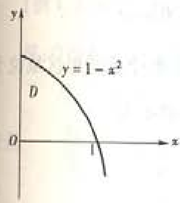

图 1.3-12

解：抛物线 $y=1-x^2$ 与 x 轴和 y 轴的交点依次为 $(1,0)$ 及 $(0,1)$，积分区域 D（图 1.3-12）可表示成

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1-x^2,x\in[0,1]\}.$$

从而

$$\iint\limits_D 3x^2y^2\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\left[\int_0^{1-x^2}3x^2y^2\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1[x^2y^3]_0^{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1x^2(1-x^2)^3\mathrm{d}x=\frac{16}{315}.$$

【例 1.3-35】 交换积分次序，二次积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$ 化为（　　）.

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1-\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{2-y}f(x,y)\mathrm{d}x$

解：由所给的二次积分，可得积分区域

$$D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,2-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x-x^2}\},$$

如图 1.3-13 所示.

更换积分次序，得

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x,$$

故选(B).

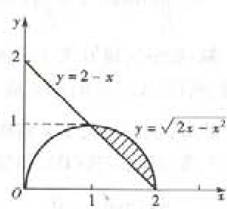

图 1.3-13

【例 1.3-36】 计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由中心在原点、半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

解：在极坐标系中，闭区域 D 可表示成

$$D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant a,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

于是

$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^a e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right]_0^a\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}(1-e^{-a^2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$=\pi(1-e^{-a^2}).$$

【例 1.3-37】 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant y,x\geqslant 0\}$，则二重积分

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

化为极坐标下的累次积分为（　　）.

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\mathrm{d}\rho$

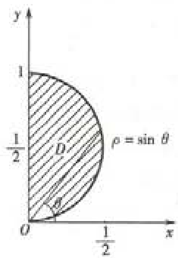

图 1.3-14

解：积分区域 D 是以 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的圆形区域位于第一象限的部分，如图 1.3-14 所示，用极坐标表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\rho\leqslant\sin\theta,$$

故选(C).

【例 1.3-38】 下列等式中，错误的是（　　）.

(A) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x\}$

(B) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_1}xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 D 与(A)中相同，$D_1=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x,y\geqslant 0\}$

(C) $\iint\limits_{D_2}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_3}\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，

其中 $D_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$D_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$

(D) $\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_3}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D_2、D_3 与(C)中相同

解：积分区域 D 关于 x 轴对称，被积函数 x^2y 关于 y 是奇函数，而被积函数 xy^2 关于 y 是偶函数，所以(A)与(B)均正确.

积分区域 D_2 关于 x 轴和 y 轴均对称，而被积函数 $\sqrt{1-x^2-y^2}$ 关于 y，x 都是偶函数，所以(C)正确，因此应选(D). 事实上，被积函数 xy 关于 y，x 都是奇函数，从而

$$\iint\limits_{D_2}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

而 $\iint\limits_{D_3} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$,

故(D)是错误的,因此本题也可直接判断(D)是错误的而作出选择.

【例 1.3-39】 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

解:积分区域

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant z\leqslant 1-x-2y,(x,y)\in D\},$$

而 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant \frac{1-x}{2},0\leqslant x\leqslant 1\}$,于是

$$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}x\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1-x}{2}}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}.$$

【例 1.3-40】 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,$\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0\}$.

解:Ω 投影到 xOy 面上,得 $D=\{(\rho,\theta)\mid 0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$,从而 Ω 可表示成

$$\Omega=\{(\rho,\theta,z)\mid 0\leqslant z\leqslant\sqrt{1-\rho^2},0\leqslant\rho\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\},$$

于是 $$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} z\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_0^{\sqrt{1-\rho^2}}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\left[\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

1.3.5 重积分的应用

1. 曲面的面积

设曲面 Σ 的方程为 $z=f(x,y)$,Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D,$f(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数,则曲面 Σ 的面积

$$A=\iint\limits_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

2. 平面薄片及空间物体的质量、重心与转动惯量

设平面薄片占有 xOy 面上的区域 D,薄片在 D 上任一点 $P(x,y)$ 处的面密度为 $\mu(x,y)$,则薄片的质量为

$$M=\iint\limits_{D}\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

薄片重心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint\limits_{D}x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_{D}y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,$$

薄片关于 x 轴,y 轴的转动惯量为

$$I_x=\iint\limits_{D}y^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma,\qquad I_y=\iint\limits_{D}x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

设空间物体占有空间闭区域 Ω,在点 (x,y,z) 处的密度为 $\rho(x,y,z)$(假定 $\rho(x,y,z)$ 在 Ω 上是连续的),则物体的质量为

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

物体重心的坐标为

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\qquad \bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\qquad \bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

物体关于 x 轴,y 轴,z 轴的转动惯量为

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_y=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

【例 1.3-41】 设半径为 a 的均匀半圆薄片的面密度为常量 μ,求此薄片的重心.

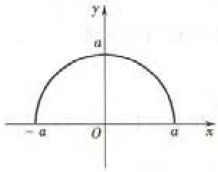

图 1.3-15

解:取坐标系如图 1.3-15 所示,薄片所占闭区域

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,y\geqslant 0\}.$$

由于闭区域 D 关于 y 轴对称,故重心 $C(\bar{x},\bar{y})$ 在 y 轴上,即 $\bar{x}=0$. 而

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint\limits_{D}\mu y\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{A}\iint\limits_{D}\rho\sin\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{A}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho^2\sin\theta\mathrm{d}\rho=\frac{a^3}{3A}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2a^3}{3A}=\frac{4a}{3\pi},$$

因此薄片的重心为 $C\left(0,\dfrac{4a}{3\pi}\right)$.

【例 1.3-42】 求半径为 a、高为 h 的均匀圆柱体(密度 $\rho=1$)对于过中心而平行于母线的轴的转动惯量.

解:取圆柱体的中心为坐标原点,建立空间直角坐标系,使 z 轴与母线平行,则圆柱体占有空间闭区域

$$\Omega=\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2\leqslant a^2,-\frac{h}{2}\leqslant z\leqslant\frac{h}{2}\right\}.$$

于是所求的转动惯量为

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\mathrm{d}z\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=h\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{a}\rho^3\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\pi a^4\cdot h=\frac{1}{2}Ma^2,$$

其中 $M=\pi a^2h$ 为圆柱体的质量.

1.3.6 曲线积分

1. 曲线积分的概念与性质

(1) 对弧长的曲线积分的概念与性质

设L为平面内一条光滑曲线弧,$f(x,y)$在L上有界,将L任意划分成n个小段,第i个小段的长度为Δs_i,(ξ_i,η_i)为第i小段上任一点,$\lambda=\max\{\Delta s_1,\cdots,\Delta s_n\}$. 若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

总存在,则称此极限为$f(x,y)$在L上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分,记作$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$,即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i.$$

若一曲线形构件L在点(x,y)处的线密度为$\mu(x,y)$,则曲线积分$\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s$就表示此构件的质量$M$,即

$$M=\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s.$$

当L为闭曲线时,曲线积分记为$\oint_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

第一类曲线积分具有如下性质:

① $\int_L [f(x,y)\pm g(x,y)]\mathrm{d}s=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\pm\int_L g(x,y)\mathrm{d}s$;

② $\int_L kf(x,y)\mathrm{d}s=k\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$($k$为常数);

③ $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1}f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2}f(x,y)\mathrm{d}s\quad(L=L_1+L_2)$.

(2) 对坐标的曲线积分的概念与性质

设L为平面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧,$P(x,y)$,$Q(x,y)$在L上有界,将L任意分成n个有向小弧段$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$($i=1,2,\cdots,n$;$M_0=A$,$M_n=B$),$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$. 任取$(\xi_i,\eta_i)\in\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$,记$\lambda=\max\{\Delta s_1,\cdots,\Delta s_n\}$,若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i$$

总存在,则称此极限为$P(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标x的曲线积分,记作$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$,即

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i.$$

类似地定义$Q(x,y)$在有向曲线弧L上对y的曲线积分$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$,即

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i.$$

对坐标的曲线积分也称为第二类曲线积分. $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$通常写成

$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$

若某质点沿有向曲线弧 L 移动,受变力 $F=(P(x,y),Q(x,y))$ 作用,则变力做的功为

$$W = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

对坐标的曲线积分具有如下性质:

① $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad (L = L_1 + L_2)$;

② $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x, \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_{L^-} Q(x,y)\mathrm{d}y$,

其中 L^- 表示与 L 反向的有向曲线弧.

2. 曲线积分的计算法

(1)对弧长的曲线积分的计算法

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上连续,L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 具有一阶连续导数,且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t,$$

其中 $\alpha<\beta$.

(2)对坐标的曲线积分的计算法

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上连续,L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时,对应的动点从 L 的起点 A 运动到终点 B. $\varphi(t),\psi(t)$ 具有一阶连续导数,且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t,$$

其中 α 对应起点 A,β 对应终点 B,α 不一定小于 β.

上述关于两类平面曲线积分的定义、性质及计算法,可以类似地推广到两类空间曲线积分的情形,这里不再详述.

【例 1.3-43】 计算半径为 R、中心角为 2α 的圆弧对于它的对称轴的转动惯量 I(线密度 $\rho=1$).

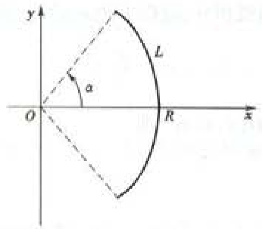

图 1.3-16

解:取圆弧的圆心为原点,对称轴为 x 轴,并使圆弧位于 y 轴的右侧(图 1.3-16),则

$$I = \int_L y^2\mathrm{d}s.$$

L 的参数方程为:

$$x=R\cos\theta, y=R\sin\theta \quad (-\alpha\leqslant\theta\leqslant\alpha).$$

于是

$$I=\int_L y^2\mathrm{d}s=\int_{-\alpha}^{\alpha}R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2+(R\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$
$$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{R^3}{2}\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$
$$=\frac{R^3}{2}(2\alpha-\sin 2\alpha)$$
$$=R^3(\alpha-\sin\alpha\cos\alpha).$$

【例1.3-44】 计算 $\int_L y^2\mathrm{d}x$，其中 L 是半径为 a、圆心为原点、按逆时针方向绕行的上半圆周(图1.3-17).

解:L 是参数方程为:

$x=a\cos\theta,y=a\sin\theta$

当参数 θ 从0变到 π 的曲线弧. 因此,

$$\int_L y^2\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}a^2\sin^2\theta(-a\sin\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=a^3\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)\mathrm{d}(\cos\theta)$$
$$=a^3\left[\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi}=-\frac{4}{3}a^3.$$

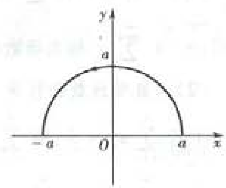

图1.3-17

【例1.3-45】 计算 $\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z$，其中 Γ 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线段 AB.

解:AB 的参数方程是:

$x=3t,y=2t,z=t,t$ 从1变到0,

所以 $$\int_\Gamma x^3\mathrm{d}x+3zy^2\mathrm{d}y-x^2y\mathrm{d}z=\int_1^0[(3t)^3\cdot 3+3t(2t)^2\cdot 2-(3t)^2\cdot 2t]\mathrm{d}t$$
$$=87\int_1^0 t^3\mathrm{d}t=-\frac{87}{4}.$$

1.4 无穷级数

要求:①理解常数项级数收敛、发散以及和的概念,了解收敛级数的基本性质及收敛级数的必要条件.

②了解正项级数的比较审敛法以及几何级数与 p－级数的敛散性,掌握正项级数的比值审敛法.

③了解交错级数的莱布尼兹判别法,了解绝对收敛与条件收敛的概念及绝对收敛与级数收敛的关系.

④了解幂级数的收敛域的结构以及和函数的概念,掌握简单幂级数的收敛半径、收敛区间的求法,了解幂级数在其收敛区间内的一些基本性质.

⑤掌握 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 与 $(1+x)^{\alpha}$ 的麦克劳林展开式,并会用间接法将一些简单的函数展开成幂级数.

⑥了解傅里叶级数的概念,了解函数的傅里叶级数的收敛定理,会将周期为 2π 的函数展

开为傅里叶级数,会将定义在$(0,\pi)$上的函数展开为正弦级数或余弦级数.

1.4.1 数项级数

1. 常数项级数的概念和性质

(1)常数项级数的概念

数列$u_n(n=1,2,\cdots)$的各项依次相加的表达式$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$称为无穷级数,第$n$项$u_n$称为级数的一般项或通项,前$n$项之和$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和.若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$存在,称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,并称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和为$S$;若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛时,$r_n=\sum\limits_{i=n+1}^{\infty}u_i$称为级数的余项,此时有$\lim\limits_{n\to\infty}r_n=0$.

(2)常数项级数的性质

①若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=kS$ (k为常数).

②若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=T$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=S\pm T$.

③收敛级数加括号后所成的级数仍收敛于原来的和.

④在级数中改变有限项,不影响其收敛性.

⑤若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$;反之,不一定成立.

(3)典型级数

①几何级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$,当$|q|<1$时,收敛于$\dfrac{a}{1-q}$,当$|q|\geqslant1$时,级数发散.

②p-级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}(p>0)$,当$p>1$时,级数收敛,当$0<p\leqslant1$时,级数发散.

2. 常数项级数的审敛法

(1)正项级数审敛法

若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,其中$u_n\geqslant0(n=1,2,\cdots)$,则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数.

①收敛准则:正项级数收敛的充分必要条件是其部分和有界.

②比较审敛法:设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$为正项级数,对某个$N>0$,当$n>N$时,$0\leqslant u_n\leqslant Cv_n$($C>0$为常数).若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛;若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散.

比较审敛法的极限形式:若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l(v_n\neq0)$,则当$0<l<+\infty$时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散.

③比值审敛法:设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数,若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=l$,则当$l<1$时,级数收敛;当$l>1$或$l=$

$+\infty$ 时,级数发散;当 $l=1$,级数可能收敛也可能发散.

④根值审敛法:设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数,若 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$,则当 $l<1$ 时,级数收敛;当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;当 $l=1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

(2)任意项级数审敛法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$,其中 $u_n(n=1,2,\cdots)$ 为任意实数,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数.

若级数的各项正负交替出现,即可写作 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)$ 或 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n(u_n>0)$,则称级数为交错级数.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数,而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,而 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

①莱布尼兹判别法:若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(u_n>0)$ 满足:$u_n\geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$ 及 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛,且有余项 $|r_n|\leqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$.

②若任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛,则该级数收敛.

③设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数,若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=l$(或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=l$),则当 $l<1$ 时,级数绝对收敛;当 $l>1$ 或 $l=+\infty$ 时,级数发散;当 $l=1$ 时,级数可能收敛也可能发散.

【例 1.4-1】 数项级数的部分和数列有界是该级数收敛的( ).

(A)充分条件　　(B)必要条件

(C)充分必要条件　　(D)既非充分又非必要条件

解:按数项级数收敛的定义,级数收敛即级数的部分和数列有极限,而部分和数列有界是部分和数列有极限的必要条件,故选(B).

注意:对正项级数来说,部分和数列有界是级数收敛的充分必要条件;而对一般的非正项级数来说,部分和数列有界仅是级数收敛的必要条件,而不是充分条件.

【例 1.4-2】 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$,$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于( ).

(A)3　　(B)7　　(C)8　　(D)9

解:因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5-2=3,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} = 5 + 3 = 8,$$

因此选(C).

【例 1.4-3】 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 的收敛性.

解:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ 为正项级数,因为

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散(p - 级数 $p=1$ 的情形),根据比较审敛法的极限形式知此级数发散.

【例 1.4-4】 判别级数

$$\frac{1}{10} + \frac{1 \cdot 2}{10^2} + \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{10^3} + \cdots$$

的收敛性.

解:所给级数为正项级数,因为

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \frac{10^n}{n!} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{10} = +\infty,$$

根据比值审敛法知所给级数发散.

【例 1.4-5】 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ 的收敛性.

解:所给级数为正项级数,因为

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1,$$

根据根值审敛法知所给级数收敛.

【例 1.4-6】 级数

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

的收敛性是(　　).

(A)发散　　(B)条件收敛　　(C)绝对收敛　　(D)无法判定

解:按莱布尼兹判别法知,所给级数收敛;而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 是 p - 级数 $p = \frac{1}{2}$ 的情形,$p<1$,故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ 发散,因此应选(B).

【例 1.4-7】 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^4}$($\alpha \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$) 的收敛性.

解:所给级数是任意项级数,因为

$$\left| \frac{\sin n\alpha}{n^4} \right| \leqslant \frac{1}{n^4},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 是收敛的(p-级数,$p=4$).根据比较审敛法知,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^4}\right|$ 收敛,即级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^4}$ 绝对收敛,从而所给级数收敛.

【例1.4-8】 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$ 的收敛性.

解:所给级数为任意项级数,因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{2^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=+\infty,$$

根据任意项级数审敛法③知,所给级数发散.

【例1.4-9】 下列各选项正确的是( ).

(A)若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛

(B)若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛

(C)若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则 $u_n\geqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$

(D)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $u_n\geqslant v_n(n=1,2,\cdots)$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛

解:因为 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2+2u_nv_n)$,又 $|u_nv_n|\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}2u_nv_n$ 也收敛,故应选(A).

注:关于选项(B)、(C)、(D)都不正确也可作如下分析:

若设 $u_n=\frac{1}{n},v_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛,但 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,故(B)不正确;若设 $u_n=\frac{1}{2n}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散,但 $u_n<\frac{1}{n}$,故(C)不正确;若设 $u_n=\frac{1}{n^2}$,则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,且 $u_n\geqslant-\frac{1}{n}$,但 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散,故(D)也不正确.

1.4.2 幂级数 泰勒级数

1.幂级数的概念和性质

(1)幂级数的概念

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 称为幂级数,令 $t=x-x_0$,可化为 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n$.

(2)幂级数的收敛性

关于幂级数的收敛性,有如下定理.

定理(阿贝尔定理) 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0(x_0\neq0)$ 时收敛,则对适合 $|x|<|x_0|$ 的一切 x,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 绝对收敛;若级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $x=x_0$ 时发散,则对适合 $|x|>|x_0|$ 的一切 x,级

数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.

(3)幂级数的收敛半径及其求法

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在某些点收敛,在某些点发散,则必存在唯一的正数 R,使当 $|x|<R$ 时,级数绝对收敛,当 $|x|>R$ 时,级数发散.这个 R 称为幂级数的收敛半径,若幂级数只在 $x=0$ 处收敛,则规定收敛半径 $R=0$;若幂级数对一切 x 都收敛,则规定收敛半径 $R=+\infty$.

关于幂级数的收敛半径的求法,有如下定理.

定理 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho\right),$$

则它的收敛半径

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \text{当 } \rho\neq 0 \text{ 时},\\ +\infty, & \text{当 } \rho=0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } \rho=+\infty \text{ 时}.\end{cases}$$

(4)幂级数的性质

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R,则称开区间 $(-R,R)$ 为幂级数的收敛区间①;根据幂级数在 $x=\pm R$ 处的收敛情况,可以决定幂级数的收敛域(即收敛点的全体)是四个区间:$(-R,R)$,$[-R,R)$,$(-R,R]$,$[-R,R]$ 之一.

幂级数具有以下性质:

①幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在其收敛域上连续;

②幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在其收敛区间内可导,且有逐项求导、逐项积分公式

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x^n)'=\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1},$$

$$\int_0^x S(x)\,dx=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_0^x x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

逐项求导、逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

2. 泰勒级数

(1)泰勒级数的概念

若 $f(x)$ 在点 x_0 处具有各阶导数,则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$ 称为函数 $f(x)$ 在点 x_0

① 在《高等数学》(同济大学数学教研室主编,第3版)中,幂级数的收敛区间定义为幂级数的收敛域.现在把幂级数的收敛区间专指开区间 $(-R,R)$,其中 R 为幂级数的收敛半径.

处的泰勒级数,特别当 $x_0=0$ 时,级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ 称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

(2)函数展开成泰勒级数的条件

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数,则 $f(x)$ 在该邻域内能展开成泰勒级数(即 $f(x)$ 的泰勒级数收敛于 $f(x)$ 本身)的充分必要条件是 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\to 0(n\to\infty)$(其中 $\xi=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1$).

(3)函数展开成幂级数的方法

①直接法.要把函数 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,可以按照下列步骤进行.

第一步:求出 $f(x)$ 的各阶导数 $f'(x),f''(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$,如果在 $x=0$ 处的某阶导数不存在,就停止进行,例如在 $x=0$ 处,$f(x)=x^{\frac{7}{3}}$ 的三阶导数不存在,它就不能展开为 x 的幂级数.

第二步:求函数及其各阶导数在 $x=0$ 处的值:

$$f(0),f'(0),f''(0),\cdots,f^{(n)}(0),\cdots.$$

第三步:写出幂级数

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots,$$

并求出收敛半径 R.

第四步:考察当 x 在区间 $(-R,R)$ 内时余项 $R_n(x)$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间})$$

是否为零?如果为零,则函数 $f(x)$ 在区间 $(-R,R)$ 内的幂级数展开式为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\quad(-R<x<R).$$

②间接法,即利用一些已知的函数展开式、幂级数的运算(如四则运算,逐项求导,逐项积分)以及变量代换等,将所给函数展开成幂级数.这种方法不但计算简单,而且可以避免研究余项.

如将 $\frac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

利用

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots(-1<x<1),$$

把 x 换成 $-x^2$,得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots(-1<x<1).$$

又如,将 $\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数.

因为

$$(\ln(1+x))'=\frac{1}{1+x},$$

而 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots(-1<x<1),$$

将上式从 0 到 x 积分，得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1).$$

已知 $\sin x$ 的幂级数展开式：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty),$$

对上式逐项求导，就得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$$

(4)常用函数的幂级数展开式

①$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$

②$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$

③$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$

④$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\cdots\quad(-1<x\leqslant 1).$

⑤$(1+x)^\mu=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!}x^n+\cdots\quad(-1<x<1)$

当 $\mu=-\frac{1}{2},-1$ 时，有

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-\cdots\quad(-1<x\leqslant 1),$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots\quad(-1<x<1).$$

【例 1.4-10】 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域是(　　).

(A)$(-1,1)$　　(B)$[-1,1]$　　(C)$[-1,1)$　　(D)$(-1,1]$

解：易知级数收敛半径 $R=1$，当 $x=-1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 发散，当 $x=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 收敛，故应选(D).

【例 1.4-11】 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处(　　).

(A)条件收敛　　(B)绝对收敛　　(C)发散　　(D)收敛性不能确定

解：由 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的结构知其收敛区间的中心为 $x=1$，已知 $x=-1$ 为此级数的一个收敛点，设其收敛半径为 R，则 $R\geqslant|(-1)-1|=2$，而 $x=2$ 与收敛区间中心 $x=1$ 的距离为 1，$1<R$，由幂级数的收敛性(阿贝尔定理)知，此级数在 $x=2$ 处绝对收敛，故应选(B).

【例 1.4-12】 利用逐项求导法求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\ (-1<x<1)$ 的和函数.

解:幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的和函数是$\frac{1}{1-x}(-1<x<1)$,即

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n(-1<x<1).$$

利用逐项求导公式,得

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}(-1<x<1),$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}(-1<x<1).$$

【例1.4-13】 将函数$\frac{1}{x}$展开成$(x-3)$的幂级数.

解:因为$\frac{1}{x}=\frac{1}{3+(x-3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$,

而
$$\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^n}\left(-1<\frac{x-3}{3}<1\right),$$

因此
$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{3^{n+1}}(0<x<6).$$

【例1.4-14】 将函数$\frac{1}{x^2-3x+2}$展开成x的幂级数.

解:先将有理分式分解成部分分式之和:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-2)(x-1)}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}+\frac{1}{1-x},$$

而
$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n(|x|<2),$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n(|x|<1),$$

故
$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n(|x|<1).$$

【例1.4-15】 函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$在$x=2$处的泰勒级数展开式为( ).

(A) $f(x)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n \quad (|x-2|<1)$

(B) $f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n \quad (|x-2|<1)$

(C) $f(x)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\right](x-2)^n \quad (|x-2|<1)$

(D) $f(x)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+1}}\right](x-2)^n \quad (|x-2|<1)$

解:因为

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x+1)(x-3)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+1}\right),$$

而 $$\frac{1}{x-3}=\frac{1}{-1+(x-2)}=-\frac{1}{1-(x-2)}=-\sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n\quad(|x-2|<1),$$

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{3+(x-2)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{3}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n\quad(|x-2|<1),$$

所以 $$f(x)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right](x-2)^n\quad(|x-2|<1),$$

应选(A).

1.4.3 傅里叶级数

1. 傅里叶级数概念

(1)三角函数系的正交性

三角函数系

$$1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots$$

在区间$[-\pi,\pi]$上正交,就是指上述三角函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi,\pi]$上的积分等于零,即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,dx=0\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\,dx=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,dx=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\,dx=0\quad(k,n=1,2,3,\cdots,k\neq n).$$

(2)傅里叶系数和傅里叶级数

设$f(x)$是周期为2π的周期函数,且下面公式中出现的积分

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx\quad(n=1,2,\cdots)$$

都存在,则系数$a_0,a_1,b_1,\cdots$叫做函数$f(x)$的傅里叶系数,级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

叫做函数$f(x)$的傅里叶级数.

(3)狄里克雷收敛定理

设$f(x)$是周期为2π的周期函数,若它满足条件:

①在一个周期内连续,或只有有限个第一类间断点;

②在一个周期内至多只有有限个极值点，

则$f(x)$的傅里叶级数收敛，且当x是$f(x)$的连续点时，级数收敛于$f(x)$；当x是$f(x)$的间断点时，级数收敛于$\frac{1}{2}[f(x^+)+f(x^-)]$.

2. 正弦级数和余弦级数

(1)正弦级数

若$f(x)$是周期为2π的奇函数，则它的傅里叶系数为

$$a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots),$$

它的傅里叶级数是只含有正弦项的正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx.$$

(2)余弦级数

若$f(x)$是周期为2π的偶函数，则它的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots),$$

它的傅里叶级数是只含有常数项和余弦项的余弦级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx.$$

【例1.4-16】 设$f(x)$是周期为2π的周期函数，它在$[-\pi,\pi)$上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1, & 0\leqslant x<\pi.\end{cases}$$

问$f(x)$的傅里叶级数在$x=-\pi$处收敛于何值.

解：所给函数满足狄里克雷收敛定理的条件，$x=-\pi$是函数的间断点，按收敛定理它的傅里叶级数在$x=-\pi$处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi^-)+f(-\pi^+)]=\frac{1}{2}[1+(-1)]=0.$$

【例1.4-17】 将函数$f(x)=\pi^2-x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$展开成傅里叶级数.

解：将函数$f(x)=\pi^2-x^2$在$[-\pi,\pi]$外作周期延拓，注意到$f(x)$是偶函数，故$b_n=0(n=1,2,\cdots)$.

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi^2-x^2)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{4(-1)^n}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots).$$

$f(x)$满足收敛定理的条件，在$[-\pi,\pi]$上连续，且$f(-\pi)=f(\pi)$，因此在$[-\pi,\pi]$上，有

$$f(x)=\pi^2-x^2=\frac{2\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

【例1.4-18】 若$f(-x)=g(x)$，则$f(x)$与$g(x)$的傅里叶系数$a_n,b_n,\alpha_n,\beta_n\quad(n=0,1,2,$

…)之间的关系为(　　).

(A)$a_n=\alpha_n, b_n=\beta_n$　　(B)$a_n=\alpha_n, b_n=-\beta_n$

(C)$a_n=-\alpha_n, b_n=\beta_n$　　(D)$a_n=-\alpha_n, b_n=-\beta_n$

解:因为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\mathrm{d}t=\alpha_n,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \xlongequal{x=-t} -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(-t)\sin nt\mathrm{d}t=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\mathrm{d}t=-\beta_n,$$

故选(B).

【例 1.4-19】 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数,在$[-\pi,\pi]$上的表达式为$f(x)=\cos\frac{x}{2}$,则$f(x)$的傅里叶级数为(　　).

(A) $-\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$　　(B) $\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$

(C) $\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$　　(D) $-\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\cos nx$

解:由于$f(x)$是偶函数,所以

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi},\frac{a_0}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

因此,(A)、(D)是错误的.而(B)、(C)的差别只在于除常数项外的各项符号相反,所以,只需计算傅里叶系数a_1加以检验即可.

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\cos x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3}{2}x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[2\sin\frac{x}{2}+\frac{2}{3}\sin\frac{3}{2}x\right]_0^{\pi}=\frac{4}{3\pi},$$

故选(C).

【例 1.4-20】 下列命题中,错误的是(　　).

(A)设$f(x)$为奇函数,则$f(x)$的傅里叶级数是正弦级数

(B)设$f(x)$为偶函数,则$f(x)$的傅里叶级数是余弦级数

(C)设$f(x)$满足狄里克雷条件,则有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

其中a_n,b_n为$f(x)$的傅里叶系数.

(D)设$f(x)$是周期为2π的周期函数,则$f(x)$的傅里叶系数为

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots).$$

解:若$f(x)$满足狄里克雷条件,则有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=S(x),$$

其中 a_n,b_n 是 $f(x)$ 的傅里叶系数,而

$$S(x)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为 }f(x)\text{ 的连续点}, \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为 }f(x)\text{ 的间断点}. \end{cases}$$

因此命题(C)是错误的,应选(C).

1.5 常微分方程

要求:①了解微分方程、解、通解、初始条件和特解等概念.

②掌握变量可分离的方程、齐次微分方程、一阶线性微分方程、全微分方程的解法.

③会用降阶法求下列三种类型的高阶方程:$y^{(n)}=f(x)$,$y''=f(x,y')$,$y''=f(y,y')$.

④理解线性微分方程解的性质及解的结构.

⑤掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法.

1.5.1 微分方程的基本概念

1.微分方程的概念

凡表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系的方程,称为微分方程.

微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数,称为微分方程的阶.

如方程

$$\frac{dy}{dx}=2x$$

是一阶微分方程;又如,方程

$$x^3y'''+x^2y''-4xy'=3x^2$$

是三阶微分方程.

一般地,n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0, \tag{1.5-1}$$

其中 F 是 $n+2$ 个变量的函数,$y^{(n)}$ 是必须出现的,而 $x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}$ 等变量则可以不出现.

2.微分方程的解　通解

微分方程的解是一个函数,把这函数代入微分方程能使该方程成为恒等式.确切地说,对于 n 阶微分方程(1.5-1),设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上有 n 阶导数,且在区间 I 上满足

$$F[x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x)]\equiv 0,$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为微分方程(1.5-1)在区间 I 上的解.

如果二元代数方程 $\Phi(x,y)=0$ 所确定的隐函数是某微分方程的解,那么 $\Phi(x,y)=0$ 就称为该微分方程的隐式解.

如果微分方程的解中含有任意常数,且任意常数的个数(这里所说的任意常数是互相独立的)与微分方程的阶数相同,这样的解叫做微分方程的通解.

如方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$$

是二阶微分方程.而函数

$$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$$

满足该方程,即这函数是方程的解,又这函数中含有两个独立的任意常数,故这函数是上述微分方程的通解.

3. 初始条件与特解

能用来确定通解中的任意常数的条件称为初始条件. 通常一阶微分方程的初始条件为

$$y|_{x=x_0}=y_0,$$

二阶微分方程的初始条件为

$$y|_{x=x_0}=y_0, y'|_{x=x_0}=y'_0,$$

其中 x_0, y_0 和 y'_0 都是给定的值.

通解中的任意常数全部确定后,就得到一个确定的解,这种解称为微分方程的特解.

【例 1.5-1】 验证函数 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$ 是微分方程 $y''-y'-2y=0$ 的通解.

证:$y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}$, $y'=-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x}$, $y''=C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}$,代入方程得

$$左=C_1e^{-x}+4C_2e^{2x}-(-C_1e^{-x}+2C_2e^{2x})-2(C_1e^{-x}+C_2e^{2x})=0=右.$$

所给方程是二阶的,所给函数中恰好含 C_1、C_2 两个任意常数,且因 $e^{2x}/e^{-x}=e^{3x}\neq 0$,故这两个任意常数不能合并成一个,即它们是相互独立的,因此所给函数是所给方程的通解.

1.5.2 可分离变量的方程

一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x)}{g(y)} \tag{1.5-2}$$

称可分离变量的方程. 把式中的 y 的函数和 dy 归入方程的一端,x 的函数和 dx 归入另一端,成为

$$g(y)dy=f(x)dx,$$

这一步骤称为分离变量. 分离变量后,两端可分别积分

$$\int g(y)dy=\int f(x)dx.$$

设 $g(y)$、$f(x)$ 的原函数依次为 $G(y)$ 与 $F(x)$,即得方程(1.5-2)的通解

$$G(y)=F(x)+C.$$

【例 1.5-2】 xOy 平面上一条曲线通过点(2,3),它在两坐标轴间的任一切线段被切点所平分,求它的方程.

解:设曲线上任一点为(x,y),依题意,曲线在点(x,y)的切线在两坐标轴上的截距应为 $2x$ 及 $2y$(图 1.5-1),切线斜率为$\frac{dy}{dx}$,因此有

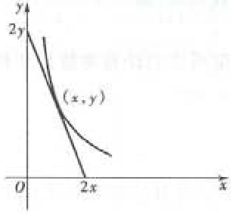

图 1.5-1

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x},$$

初始条件为 $x=2$ 时 $y=3$.

分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x},$$

积分得 $\ln|y|=-\ln|x|+C$,

即 $y=\frac{C_1}{x}$.

以初始条件代入得 $C_1=6$,故所求曲线方程为

$$y=\frac{6}{x}(x>0).$$

【例1.5-3】 方程 $(y+1)^2\frac{dy}{dx}+x^3=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=-1$ 的解是(　　).

(A)$3x^4-4(y+1)^3=0$　　(B)$3x^4+4(y+1)^3=0$

(C)$4x^4-3(y+1)^3=0$　　(D)$4x^4+3(y+1)^3=0$

解:分离变量,得

$$(y+1)^2dy=-x^3dx.$$

积分得 $\frac{1}{3}(y+1)^3=-\frac{1}{4}x^4+C.$

以初始条件代入上式,得 $C=0$,故所求的解是

$$\frac{1}{3}(y+1)^3+\frac{1}{4}x^4=0,$$

应选(B).

1.5.3 齐次微分方程

方程

$$\frac{dy}{dx}=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\tag{1.5-3}$$

称为齐次微分方程.

令 $u=\frac{y}{x}$,则 $y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,于是原方程化为

$$u+x\frac{du}{dx}=\varphi(u),$$

这是可分离变量的方程.可用分离变量法求得方程的通解.

【例1.5-4】 求方程 $y^2+x^2\frac{dy}{dx}=xy\frac{dy}{dx}$ 的通解.

解:原方程可写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy-x^2}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1},$$

这是齐次微分方程.令 $\frac{y}{x}=u$,则 $y=ux,\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,于是,得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{u-1},$$

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)du=\frac{dx}{x}.$$

两端积分,得

$$u-\ln|u|+C=\ln|x|,$$

$$\ln|xu|=u+C.$$

以$\frac{y}{x}$代 u,便得方程的通解

$$\ln|y| = \frac{y}{x} + C$$

1.5.4 一阶线性方程

$$y' + P(x)y = Q(x) \tag{1.5-4}$$

称为一阶线性方程. 当 $Q(x) \equiv 0$ 时,式(1.5-4)称为线性齐次方程;当 $Q(x)$ 不恒等于零时,式(1.5-4)称为线性非齐次方程.

线性齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 是一个变量可分离的方程. 经分离变量并积分,得通解

$$\ln|y| = -\int P(x)\mathrm{d}x + C_1, \text{或 } y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}.$$

非齐次方程(1.5-4)的通解为

$$y = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right]. \tag{1.5-5}$$

【例 1.5-5】 求方程$(x+1)y' - 2y = (x+1)^4$ 的通解.

解:利用一阶线性方程的通解公式(1.5-5)来求解,为此,把所给方程写成标准形式

$$y' - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3.$$

这里,$P(x) = -\frac{2}{x+1}$,$Q(x) = (x+1)^3$,

代入公式(1.5-5),得

$$y = (x+1)^2\left[\int (x+1)^3(x+1)^{-2}\mathrm{d}x + C\right],$$

即 $$y = (x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2 + C\right].$$

【例 1.5-6】 已知微分方程 $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^{\frac{5}{2}}$的一个特解为 $y^* = \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$,则此微分方程的通解是( ).

(A)$\frac{C}{(x+1)^2} + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$ (B)$\frac{C}{(x+1)^2} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

(C)$C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$ (D)$C(x+1)^2 - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}}$

解:原方程对应的齐次方程的通解为

$$Y = Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x} = Ce^{\int \frac{2}{x+1}\mathrm{d}x} = C(x+1)^2.$$

根据线性方程解的结构可知原微分方程的通解为

$$y = C(x+1)^2 + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{7}{2}},$$

故应选(C).

【例 1.5-7】 将质量为 m 的物体在空气中竖直上抛,初速度为 v_0,若空气阻力与物体的速度 $v(t)$(t 是时间)成正比,比例系数为 k,g 为重力加速度. $v(t)$所满足的微分方程及初始条件是( ).

(A)$m\frac{dv}{dt}=kv,v(t)|_{t=0}=v_0$　　(B)$m\frac{dv}{dt}=-kv,v(t)|_{t=0}=v_0$

(C)$m\frac{dv}{dt}=-kv-mg,v(t)|_{t=0}=v_0$　　(D)$m\frac{dv}{dt}=-kv+mg,v(t)|_{t=0}=v_0$

解:物体竖直上抛时,所受的外力有两个,一是空气阻力,一是物体的重力.这两个力的方向都与物体运动方向相反.由牛顿第二定律知,应选(C).

1.5.5 全微分方程

若方程

$$P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1.5-6}$$

的左端恰好是某个函数 $u=u(x,y)$ 的全微分,则方程(1.5-6)就称为全微分方程,且

$$u(x,y)=C$$

就是方程(1.5-6)的隐式通解.

当函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在某单连通域 G 内具有一阶连续偏导数,且满足

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在区域 G 内恒成立时,方程(1.5-6)就是全微分方程,其通解为

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y=C \tag{1.5-7}$$

其中 $M_0(x_0,y_0)$ 为 G 内适当选定的点.

【例 1.5-8】 求方程 $(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+(3x^2y-3xy^2+y^2)\mathrm{d}y=0$ 的通解.

解:设 $P=5x^4+3xy^2-y^3,Q=3x^2y-3xy^2+y^2$.因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=6xy-3y^2=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以这是全微分方程,取 $x_0=0,y_0=0$,根据公式(1.5-7)有

$$u(x,y)=\int_0^x(5x^4+3xy^2-y^3)\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y=x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3,$$

于是,方程的通解为

$$x^5+\frac{3}{2}x^2y^2-xy^3+\frac{1}{3}y^3=C.$$

1.5.6 几种可降阶的方程

1. $y^{(n)}=f(x)$

这类方程可直接积分,积分一次得

$$y^{(n-1)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C,$$

即把原方程降低一阶.积分 n 次,即可得通解

$$y=\int\cdots\int f(x)\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x+C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}+\cdots+C_n.$$

2. $y''=f(x,y')$

这是不显含 y 的二阶方程,令 $y'=p$,则 $y''=p'$,代入即得

$$p'=f(x,p),$$

这样就把二阶方程降为一阶方程. 设求得此一阶方程的通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，则原方程的通解为

$$y=\int\varphi(x,C_1)\,\mathrm{d}x+C_2.$$

3. $y''=f(y,y')$

这是不显含 x 的二阶方程，令 $y'=p$，则

$$y''=p'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}.$$

代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p),$$

即把二阶方程降为一阶方程. 设求得此一阶方程的通解为 $p=\varphi(y,C_1)$，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$，分离变量并积分得原方程的通解为

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

【例 1.5-9】 求方程 $xy''-3y'=x^{\frac{7}{2}}$ 的通解.

解：这是不显含 y 的方程，令 $y'=p$，则 $y''=p'$，代入方程，得一阶线性方程

$$xp'-3p=x^{\frac{7}{2}}，即\ p'-\frac{3}{x}p=x^{\frac{5}{2}}.$$

利用通解公式(1.5-5)，有

$$p=x^3\left[\int x^{\frac{5}{2}}\cdot x^{-3}\mathrm{d}x+C\right]=x^3(2\sqrt{x}+C),$$

积分得 $y=\frac{4}{9}x^{\frac{9}{2}}+C_1x^4+C_2\left(C_1=\frac{1}{4}C\right).$

【例 1.5-10】 求微分方程 $y''=3\sqrt{y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1,y'|_{x=0}=2$ 的解.

解：这是不显含 x 的方程. 令 $y'=p$，则 $y''=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，代入方程得

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=3\sqrt{y}，即\ p\mathrm{d}p=3\sqrt{y}\mathrm{d}y.$$

积分得 $\frac{1}{2}p^2=2(y^{\frac{3}{2}}+C_1),p^2=4(y^{\frac{3}{2}}+C_1)$,

$$p=\pm2\sqrt{y^{\frac{3}{2}}+C_1}.$$

由 $y=1$ 时 $p=2$，得 $C_1=0$，且知负号不合，故

$$p=2y^{\frac{3}{4}}，即\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2y^{\frac{3}{4}},$$

$$y^{-\frac{3}{4}}\mathrm{d}y=2\mathrm{d}x.$$

积分得 $4y^{\frac{1}{4}}=2x+C_2.$

由 $y|_{x=0}=1$，得 $C_2=4$，于是所求特解为

$$y^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}x+1，即\ y=\left(\frac{1}{2}x+1\right)^4\ (x\geqslant-2).$$

1.5.7 线性微分方程解的性质及解的结构定理

设有二阶齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0, \tag{1.5-8}$$

则有：

①(性质定理)如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1.5-8)的两个解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是方程(1.5-8)的解，其中 C_1、C_2 是两个任意常数；

②(结构定理)如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1.5-8)的两个线性无关的特解，那么 $y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 就是方程(1.5-8)的通解，其中 C_1、C_2 是两个任意常数.

设有二阶非齐次线性方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x), \tag{1.5-9}$$

则有：

①(结构定理)如果 $y^*(x)$ 是方程(1.5-9)的一个特解，$Y(x)$ 是与方程(1.5-9)对应的齐次方程(1.5-8)的通解，那么

$$y=Y(x)+y^*(x)$$

就是方程(1.5-9)的通解；

②(迭加原理)设方程(1.5-9)的右端 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，而 $y_1^*(x)$ 与 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

与

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^*(x)+y_2^*(x)$ 就是原方程(1.5-9)的特解.

【例1.5-11】 验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解，并写出该方程的通解.

解：由 $y_1=e^{x^2}$，得 $y_1'=2xe^{x^2}$，$y_1''=(2+4x^2)e^{x^2}$；

由 $y_2=xe^{x^2}$，得 $y_2'=(1+2x^2)e^{x^2}$，$y_2''=(6x+4x^3)e^{x^2}$.

因 $y_1''-4xy_1'+(4x^2-2)y_1=(2+4x^2)e^{x^2}-4x\cdot 2xe^{x^2}+(4x^2-2)e^{x^2}=0$，

$y_2''-4xy_2'+(4x^2-2)y_2=(6x+4x^3)e^{x^2}-4x(1+2x^2)e^{x^2}+(4x^2-2)xe^{x^2}=0$，

故 y_1 与 y_2 都是方程的解.

又因 $\dfrac{y_2}{y_1}=x\neq$ 常数，故 y_1 与 y_2 线性无关，由解的结构定理知方程的通解为

$$y=C_1y_1+C_2y_2=(C_1+C_2x)e^{x^2}.$$

1.5.8 二阶常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性微分方程的一般形式是

$$y''+py'+qy=0, \tag{1.5-10}$$

其中 p,q 为常数.

以 r^k 代替上式中的 $y^{(k)}(k=0,1,2)$，得一代数方程

$$r^2+pr+q=0,$$

这方程称为微分方程(1.5-10)的特征方程，特征方程的根称为特征根.

按特征根的情况，可直接写出方程(1.5-10)的通解如下：

①特征方程有两个不相等的实根 $r_1\neq r_2$，方程(1.5-10)的通解为

$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$;

②特征方程有两个相等的实根 $r_1=r_2=r$，方程(1.5-10)的通解为

$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$;

③特征方程有一对共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta, r_2=\alpha-i\beta(\beta\neq0)$，方程(1.5-10)的通解为

$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

上述结果，可简单地表成如下形式：

特征方程 $r^2+pr+q=0$ 的两个根 r_1,r_2	微分方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解
两个不相等的实根 r_1,r_2	$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$
两个相等的实根 $r_1=r_2=r$	$y=(C_1+C_2x)e^{rx}$
一对共轭复根 $r_{1,2}=\alpha\pm i\beta$	$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

【例 1.5-12】 求方程 $y''-2y'-3y=0$ 的通解.

解：这是二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为 $r^2-2r-3=0$，其根 $r_1=-1, r_2=3$，通解为 $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}$.

【例 1.5-13】 求方程 $y''-2y'+5y=0$ 的通解.

解：方程的特征方程为 $r^2-2r+5=0$，其根 $r_{1,2}=1\pm2i$，通解为

$y=e^x(C_1\cos2x+C_2\sin2x)$.

【例 1.5-14】 求方程 $\frac{d^2s}{dt^2}+2\frac{ds}{dt}+s=0$ 满足初始条件 $s|_{t=0}=4, s'|_{t=0}=-2$ 的特解.

解：方程的特征方程为 $r^2+2r+1=0$，其根 $r_1=r_2=-1$，通解为 $s=(C_1+C_2t)e^{-t}$.

将 $s|_{t=0}=4$ 代入通解，得 $C_1=4$，从而 $s=(4+C_2t)e^{-t}$. 求导得 $s'=(C_2-4-C_2t)e^{-t}$. 再将 $s'|_{t=0}=-2$ 代入，得 $C_2=2$，于是所求特解为 $s=(4+2t)e^{-t}$.

1.6 线性代数

要求：①理解行列式的定义与性质，掌握2阶与3阶行列式的计算，会求简单的高阶行列式.

②理解矩阵的概念，掌握矩阵的加法、数乘、乘法、转置与行列式运算及性质.

③理解逆矩阵的概念，会用伴随矩阵与初等变换求简单矩阵的逆矩阵，会解简单的矩阵方程.

④掌握初等变换方法.

⑤理解矩阵的秩的概念，掌握求矩阵秩的方法.

⑥理解 n 维向量的概念，了解向量组与矩阵之间的联系.

⑦了解向量组的线性组合、线性相关与线性无关的概念、性质与判别方法，了解向量组的最大无关组与秩的概念及求法.

⑧了解正交向量组与正交矩阵的概念.

⑨理解线性方程组的概念，掌握线性方程组的解的讨论方法，解的性质与解的结构，会求线性方程组的通解.

⑩理解特征值与特征向量的概念，了解特征值与特征向量的性质，掌握低阶方阵特征值与特征向量的计算方法.

⑪了解矩阵相似的概念与性质，了解矩阵相似对角化的方法.

⑫了解二次型的概念，了解二次型与对称阵之间的联系，会求二次型的秩，会应用特征值与特征向量把二次型化成标准形，了解矩阵合同的概念与性质，了解惯性定理与正定性.

线性代数以矩阵为工具，通过研究向量组的性质与结构解决一些特定的数学问题，例如线性方程组的求解、二次型的标准化等. 读者要以基本概念为重点，熟练掌握矩阵、向量的基本运算.

1.6.1 行列式

行列式是学习线性代数的一种工具.

1. n 阶行列式

设 $a_{ij}(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,n)$ 是 n^2 个实数，按如下排列，记号

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\cdots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式. 为了方便，也简单记作 D_n. 每个 n 阶行列式都对应一个数，这个数称为行列式的值. 在不致引起混淆时，行列式的值就称为行列式.

下面用递推法来定义行列式的值.

在 n 阶行列式中，考虑元素 a_{ij}. 把 a_{ij}所在的第 i 行与第 j 列划去，剩下 $(n-1)^2$ 个元素构成一个 $n-1$ 阶行列式

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij}为 n 阶行列式中对应于元素 a_{ij}的余子式. 记

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

称 A_{ij}为 n 阶行列式中对应于元素 a_{ij}的代数余子式. 给定 n 阶行列式，它共有 n^2 个余子式，n^2 个代数余子式.

n 阶行列式的值定义为

$$\Delta(a_{ij})=\begin{cases} a_{11}, & \text{当 } n=1; \\ a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}, & \text{当 } n\geqslant 2. \end{cases}$$

这里用第一行的元素与其对应的代数余子式乘积和来规定行列式的值. 行列式的性质将表明，这可以推广到任意一行或任意一列.

由行列式的定义得到：

1 阶行列式$|a_{11}|=a_{11}$. 这时不要与绝对值的记号混淆;

2 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}|a_{22}|+a_{12}(-1)^{1+2}|a_{21}|=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$;

3 阶行列式$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{12}\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot(-1)^{1+3}$

$\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$.

2. 若干特殊行列式的值

用行列式的定义来计算 n 阶行列式的值是很麻烦的. 下面给出几种常见的特殊行列式,其值可以作为公式记住.

(1)对角行列式

如果行列式仅主对角线(即 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 连线)上元素可能非零,则此行列式的值等于主对角线上元素之积,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

(2)上(下)三角行列式

如果行列式中元素仅当 $i\leqslant j$ 时 a_{ij} 可能非零,则此行列式称为上三角行列式,它的值等于主对角线上元素之积,即

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

类似地,如果行列式中元素仅当 $i\geqslant j$ 时 a_{ij} 可能非零,则此行列式称为下三角行列式,它的值仍等于主对角线上元素之积$\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$.

(3)次对角行列式

如果行列式仅次对角线(即 $a_{1,n},a_{2,n-1},\cdots,a_{n,1}$ 连线)上元素可能非零,那么

$$\begin{vmatrix} 0 & & & a_{1,n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n,1} & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)}a_{1,n}a_{2,n-1}\cdots a_{n,1}.$$

3. 行列式的性质

为今后计算 n 阶行列式作准备,要了解行列式的一些性质.

(1)行列式的基本性质

行列式下列三条性质涉及到的运算是线性代数中最基本的运算,要求考生熟练掌握.

①对调行列式中任意两行或任意两列一次,则行列式的值改变符号,记号 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行与第 j 行对调,记号 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示第 i 列与第 j 列对调.

②用常数 k 乘行列式中某一行或某一列的全体元素,则行列式的值等于 k 乘原行列式的值.记号 kr_i 表示第 i 行乘常数 k,记号 kc_j 表示第 j 列乘常数 k.

③把行列式的某一行(列)的全体元素乘常数后加到另一行(列)的对应元素上,则行列式的值不变.例如,以常数 k 乘第 i 行后加到第 j 行上(记作 kr_i+r_j),有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{kr_i+r_j} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+ka_{i1} & \cdots & a_{jn}+ka_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $i \neq j$.

(2)行列式的一般性质

下面罗列行列式的其他一些性质.

①如果行列式中某行(列)元素全是0,则行列式的值为0.

②如果行列式中有两行(列)元素对应相等,则行列式的值为0.

③如果行列式中有两行(列)元素对应成比例,则行列式的值为0.

④行列式经过"转置"后,其值不变,转置行列式记作 D^{T},其意义是把原行列式 D 的第 i 行元素作为 D^{T} 的第 i 列元素,且不改变次序,$i=1,\cdots,n$,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\text{且 } D^{\mathrm{T}}=D.$$

⑤如果行列式中某一行(列)上的元素都可以表示成两数之和,例如 D 的第 i 行元素都是两数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+a'_{i1} & \cdots & a_{in}+a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

使用这个性质时要注意，如果行列式 D 的全体元素都可以表示成两数之和，则 D 等于 2^n 个行列式之和.

⑥行列式中任意一行(列)的元素与其对应的代数余子式的乘积之和等于行列式的值，即对任意的 $i=1,\cdots,n$,

$$a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=D;$$

对任意的 $j=1,\cdots,n$,

$$a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}=D.$$

这个性质是行列式值定义的推广. 这将给具体计算行列式提供方便.

⑦行列式中任意一行(列)的元素与另一行(列)元素的代数余子式的乘积之和总是等于0，即对任意 $i,j=1,\cdots,n$，且 $i\neq j$,

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0.$$

4. n 阶行列式的计算

当 $n\leqslant 3$ 时，称行列式为低阶行列式；当 $n\geqslant 4$ 时，称行列式为高阶行列式. 两类行列式的计算方法是有区别的.

(1)低阶行列式的计算

尽管计算低阶行列式也可以用计算高阶行列式的方法，但通常还是用“对角线法则”比较方便.

①2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

②3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

要求读者熟练掌握低阶行列式的计算.

(2)高阶行列式的计算

高阶行列式不要用对角线法则计算，因为一个 4 阶行列式展开后有 $4!=24$ 项. 高阶行列式一般用递推的行列式定义来计算. 但要注意，首先利用行列式的性质把某行(列)上的元素

尽可能多地化成0，通常只保留一个非零元素（特殊情况下也可以保留两个非零元素），这时，一个 n 阶行列式就"降阶"为一个 $n-1$ 阶行列式.

读者只需会计算简单的高阶行列式就可以了.

【例1.6-1】　设10阶行列式

$$D_{10}=\begin{vmatrix} 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & 2 & 0 & 0 \\ & \iddots & & & \\ 0 & 8 & & & \\ 9 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & & & 10 \end{vmatrix}$$

则 D_{10} 等于（　　）.

(A) $10!$　　(B) $-10!$　　(C) $9!$　　(D) $-9!$

解：D_{10} 的第10行中只有一个非零元素. 按第10行展开得到

$$D_{10}=10\times(-1)^{10+10}\begin{vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ 9 & & & 0 \end{vmatrix}$$

由于9阶次对角行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & & & 1 \\ & & 2 & \\ & \iddots & & \\ 9 & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{9\times8}{2}}\times9!\ =9!$$

因此 $D_{10}=10!$，故选(A).

本题也可以用其他方法来计算. 逐次对调 $r_{10}\leftrightarrow r_9, r_9\leftrightarrow r_8, \cdots, r_2\leftrightarrow r_1$. 于是，由对调9次得到

$$D_{10}=(-1)^9\begin{vmatrix} 0 & & & & 10 \\ & & & 1 & \\ & & 2 & & \\ & \iddots & & & \\ 9 & & & & 0 \end{vmatrix}=(-1)^9\times(-1)^{\frac{10\times9}{2}}\times10!\ =10!.$$

【例1.6-2】　设4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+w \end{vmatrix},$$

试求行列式 D 的值.

解：利用行列式的一般性质⑤，把 D 分解成 $2^4=16$ 个行列式之和，其中11个行列式为0（因为有两列元素对应相等）已省略.

$$D=\begin{vmatrix}1+x&1+0&1+0&1+0\\1+0&1+y&1+0&1+0\\1+0&1+0&1+z&1+0\\1+0&1+0&1+0&1+w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x&0&0&0\\0&y&0&0\\0&0&z&0\\0&0&0&w\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&y&0&0\\1&0&z&0\\1&0&0&w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&1&0&0\\0&1&0&0\\0&1&z&0\\0&1&0&w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&1&0\\0&y&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x&0&0&1\\0&y&0&1\\0&0&z&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$=xyzw+yzw+xzw+xyw+xyz.$$

【例 1.6-3】 设 4 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\end{vmatrix},$$

则 D 等于(　　).

(A)24　　(B)36　　(C)12　　(D)6

解:这个行列式有一个特征,即每一列元素成首项为 1 的等比数列,这类行列式称为范德蒙行列式,它的计算公式是

$$\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i).$$

于是,　$D=(4-1)(3-1)(2-1)(4-2)(3-2)(4-3)=12.$

故选(C).

【例 1.6-4】 设关于 x 的多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&x&1\\1&2&3&x\\5&0&6&2\end{vmatrix},$$

则方程 $f(x)=0$ 的解是(　　).

(A)0　　(B)2　　(C)0.8　　(D)2 或 0.8

解:利用行列式的基本性质③,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2&1&4&1\\3&-1&x&1\\1&2&3&x\\5&0&6&2\end{vmatrix}\xlongequal[(-2)r_1+r_3]{r_1+r_2}\begin{vmatrix}2&1&4&1\\5&0&x+4&2\\-3&0&-5&x-2\\5&0&6&2\end{vmatrix},$$

按第 2 列展开后得到

$$f(x)=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5 & x+4 & 2\\ -3 & -5 & x-2\\ 5 & 6 & 2\end{vmatrix}\xlongequal{-r_3+r_1}-\begin{vmatrix}0 & x-2 & 0\\ -3 & -5 & x-2\\ 5 & 6 & 2\end{vmatrix}$$

$$=(x-2)\begin{vmatrix}-3 & x-2\\ 5 & 2\end{vmatrix}=(x-2)(4-5x).$$

由$f(x)=0$解得$x=2$或$x=0.8$. 故选(D).

【例 1.6-5】 设4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a & 0 & 0 & b\\ 0 & a & b & 0\\ 0 & c & d & 0\\ c & 0 & 0 & d\end{vmatrix},$$

则D等于( ).

(A)$a^2d^2-b^2c^2$ (B)$(ad-bc)^2$ (C)$(ab-cd)^2$ (D)$a^2b^2-c^2d^2$

解:行列式D中每一行、每一列都有两个非0元素,也可以尝试用递推定义来计算. 按第一行展开得到

$$D=aA_{11}+bA_{14}=aM_{11}-bM_{14}$$

$$=a\begin{vmatrix}a & b & 0\\ c & d & 0\\ 0 & 0 & d\end{vmatrix}-b\begin{vmatrix}0 & a & b\\ 0 & c & d\\ c & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=ad(ad-bc)-bc(ad-bc)=(ad-bc)^2.$$

故选(B).

本题也可以利用行列式的基本性质①来计算,对调两次:$r_2\leftrightarrow r_4$,$c_2\leftrightarrow c_4$. 于是,

$$D=\begin{vmatrix}a & b & 0 & 0\\ c & d & 0 & 0\\ 0 & 0 & d & c\\ 0 & 0 & b & a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix}d & c\\ b & a\end{vmatrix}=(ad-bc)^2.$$

这里用到分块行列式的性质,即分块行列式

$$D=\begin{vmatrix}D_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & D_r\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{r}D_r.$$

其中$D_1,\cdots,D_r$都是阶数较低的行列式. 这个解法的思路是,通过对调把0元素尽可能集中起来.

【例 1.6-6】 设3阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix},$$

试求:(1)$-A_{31}+2A_{32}+4A_{33}$;

(2)$-A_{11}+2A_{12}+4A_{13}$;

(3)$A_{11}+A_{12}+2A_{13}$.

解：直接计算不难但较繁. 下面利用行列式的性质求解.

(1) 代数余子式前的系数 $-1,2,4$ 恰是 D 中第三行的元素，因此

$$-A_{31}+2A_{32}+4A_{33}=D=-15,$$

其中 3 阶行列式用对角线法则计算.

(2) 根据行列式一般性质⑦，得

$$-A_{11}+2A_{12}+4A_{13}=0,$$

因为它恰是第三行上元素与第一行上元素的代数余子式的乘积之和.

(3) 代数余子式前的系数 $1,1,2$ 不是 D 中任意一行的元素，可以构造一个新的行列式，用 $1,1,2$ 取代 D 中第一行，得到

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&2\\0&-1&2\\-1&2&4\end{vmatrix},$$

由对角线法则计算 $D_1=-12$，于是，

$$A_{11}+A_{12}+2A_{13}=D_1=-12.$$

解决这类问题的关键是：先看代数余子式是属于哪一行(或列)的元素，然后观察相应系数与行列式中哪一行(或列)的元素相对应. 如果两行重合，则等于行列式的值；如果处于不同的行，则必定等于0；否则，构造一个新的行列式.

1.6.2 矩阵

矩阵是学习线性代数的基本工具. 读者要熟练掌握矩阵的运算及其性质，它们是后续知识的基础.

1. 矩阵

设 $a_{ij}(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$ 是 mn 个实数，按如下排列，记号(也可以用圆括号)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵. 为了方便，也简单记作 $(a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij}). 实数 a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列元素，或 A 的 (i,j) 元.

当 $m=n$ 时，A 称为 n 阶方阵(或 n 阶矩阵). 一阶方阵 $[a_{11}]=a_{11}$.

当 $m=1$ 时，A 称为行矩阵或行向量.

当 $n=1$ 时，A 称为列矩阵或列向量.

如果两个矩阵 A、B 的行数相等且列数相等，那么称 A 与 B 是同型矩阵. 如果 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，且对一切 $i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n$，都有 $a_{ij}=b_{ij}$，则称矩阵 A 与矩阵 B 相等，记作 $A=B$.

全体元素都是0的矩阵称为零矩阵，记作 $O_{m\times n}$ 或 O. 实数0只有一个，但零矩阵有无穷多个，因为不同型的零矩阵是不相等的.

如果一个 n 阶方阵主对角线上的元素全相等，且其余元素都是0，则称这个方阵为数量阵(或纯量阵). 例如，数量阵

$$\begin{bmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{bmatrix}.$$

如果数量阵中主对角线上的元素全是1，则称这个数量阵为单位阵，记作 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$. 如果一个 n 阶方阵除主对角线上的元素外，其余元素都是0，则称这个方阵为对角阵. 例如，对角阵

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

n 阶零矩阵、数量阵与单位阵都是特殊的对角阵.

2. 矩阵的运算及其性质

矩阵的运算及其性质是矩阵内容的核心.

(1)矩阵的加法

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相加记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法满足：

①交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

②结合律 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

当 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$ 时，称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的负矩阵，记作 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$.

(2)数乘矩阵

设 λ 是一个常数，矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$. 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定

$$\lambda\boldsymbol{A}=(\lambda a_{ij})_{m\times n}.$$

数乘矩阵满足：

①交换律 $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda$.

②结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{A})=(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\mu(\lambda\boldsymbol{A})$.

③分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$,

$\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

负矩阵 $-\boldsymbol{A}=(-1)\boldsymbol{A}$；零矩阵 $\boldsymbol{O}=0\boldsymbol{A}$；数量阵可表示成 $\lambda\boldsymbol{E}$.

矩阵的加法与数乘运算合称为矩阵的线性运算.

(3)矩阵与矩阵相乘

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记作 $\boldsymbol{AB}$，规定 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj},i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n.$$

这表明 $\boldsymbol{AB}$ 的 (i,j) 元等于左阵(即左边的矩阵 $\boldsymbol{A}$)的第 i 行元素与右阵(即右边的矩阵 $\boldsymbol{B}$)的第 j 列元素对应乘积之和. 于是，要使矩阵相乘有意义，必须满足左阵的列数等于右阵的行数.

行向量乘矩阵后仍是行向量；矩阵乘列向量后仍是列向量. 但是，交换次序相乘无意义.

矩阵与矩阵相乘满足：

①结合律 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$,

$\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

②分配律 $A(B+C)=AB+AC$,

$(A+B)C=AC+BC$.

这里要注意,矩阵相乘不具有交换律,即一般 $AB\neq BA$. 但是,如果 B 是一个数量阵,那么 $AB=BA$,即数量阵与任意一个同阶方阵具有可交换性,这里要求 A 为同阶方阵是为了保证乘法有意义. 特殊地,当 A 是 $m\times n$ 阵时,

$$E_mA=AE_n=A.$$

数与数相乘的性质不能简单地用到矩阵与矩阵的乘法. 例如,

$$AB=O\nRightarrow A=O \text{ 或 } B=O,$$

$$AX=AY\nRightarrow X=Y.$$

读者要熟悉行向量与列向量的乘法. 列向量($m\times 1$ 矩阵)与行向量($1\times n$ 矩阵)相乘是一个 $m\times n$ 矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}[b_1,\cdots,b_n]=\begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix}.$$

这个矩阵任意两行、任意两列对应成比例. 行向量($1\times n$ 矩阵)与列向量($n\times 1$ 矩阵)相乘是一个数(即 1×1 矩阵):

$$[a_1,\cdots,a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

(4)方阵的幂

设 A 是一个方阵,记 A 的 k 次幂为 A^k(k 是正整数),规定

$$A^1=A,A^{k+1}=A^kA,k\geqslant 1.$$

这表明 A 的幂 A^k 是 k 个 A 相乘. 对一般的 $m\times n$ 矩阵($m\neq n$)A,A 的幂无意义.

方阵的幂运算满足:

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl},$$

其中 k,l 是正整数.

值得注意的是,由于 $AB\neq BA$,因此,一般地

$$(AB)^k\neq A^kB^k,k\geqslant 2.$$

$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2.$$

$$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2.$$

但是,如果 B 是数量阵,那么上述式子左右相等. 例如,当 $B=\lambda E$ 时,

$$(A+B)^k=A^k+\sum_{i=1}^{k-1}C_k^iA^{k-i}B^i+B^k,$$

其中 k 是正整数.

设 n 阶方阵 $A=\alpha\beta$,其中 $\alpha=\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$,$\beta=[b_1,\cdots,b_n]$,记 $\beta\alpha=c$, $c=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i$,则

$$
\begin{aligned}
A^k &= (\alpha\beta)^k = (\alpha\beta)(\alpha\beta)\cdots(\alpha\beta)(\alpha\beta) = \alpha(\beta\alpha)(\beta\alpha)\cdots(\beta\alpha)\beta \\
&= \alpha(c^{k-1})\beta = c^{k-1}(\alpha\beta) = c^{k-1}A.
\end{aligned}
$$

这种形式的幂可以方便地计算.

(5)矩阵的转置

设 A 是 $m\times n$ 矩阵,记矩阵 A 的转置矩阵为 A^{T},A^{T} 是一个 $n\times m$ 矩阵,规定

$$
A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},
$$

即 A^{T} 的第 i 列恰是 A 的第 i 行,$i=1,\cdots,m$.

矩阵的转置满足:

$$
(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A, (\lambda A)^{\mathrm{T}}=\lambda A^{\mathrm{T}},
$$

$$
(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}, (AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.
$$

当 $m\neq n$ 时,$m\times n$ 矩阵 A 及其转置矩阵 A^{T} 不是同型矩阵,因此 $A\neq A^{\mathrm{T}}$. 如果 A 是方阵,且 $A^{\mathrm{T}}=A$,则称方阵 A 为对称阵. 对称阵中的元素按主对角线对称相等,即 $a_{ij}=a_{ji}$,$i,j=1,\cdots,n$. 例如,对角阵必定是对称阵. 对任意一个 $m\times n$ 矩阵 A,$A^{\mathrm{T}}A$ 与 AA^{T} 都是对称阵,因为

$$
(A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}A,
$$

$$
(AA^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=AA^{\mathrm{T}}.
$$

但是,$A^{\mathrm{T}}A$ 是 n 阶对称阵,AA^{T} 是 m 阶对称阵.

(6)方阵的行列式

设 A 是一个方阵,记 A 的行列式为 $|A|$,规定 $|A|$ 是由方阵 A 中全体元素构成的行列式,其中各元素的位置保持不变. 方阵与行列式是两个不同的概念,只有对于一阶方阵 $A=[a_{11}]$,才成立 $A=|A|$,因为它们都等于 a_{11}.

方阵的行列式满足:

$$
|A^{\mathrm{T}}|=|A|, |\lambda A|=\lambda^n|A|,
$$

$$
|AB|=|BA|=|A||B|,
$$

其中 A,B 都是 n 阶方阵. 要注意 $|A+B|\neq|A|+|B|$.

当 $|A|=0$ 时,称 A 为奇异阵;当 $|A|\neq0$ 时,称 A 为非奇异阵. n 阶零矩阵必定是奇异阵,但奇异阵不一定是零矩阵. 当 $AB=O$ 时,由方阵行列式的性质推得,A,B 中至少有一个是奇异阵,这里假定 A 与 B 都是方阵. 如果 $A=\alpha\beta$,其中 α 是 $n\times1$ 矩阵,β 是 $1\times n$ 矩阵,$n\geqslant2$,那么必定有 $|A|=0$,因为 A 中有两行对应成比例.

(7)方阵的伴随矩阵

设 A 是一个 n 阶方阵,记 A 的伴随矩阵为 A^*,规定

$$
A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.
$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 (i,j) 元的代数余子式.

方阵的伴随矩阵满足

$$AA^* = A^*A = |A|E, |A^*| = |A|^{n-1},$$

其中 A 是 n 阶方阵. 前一个等式表明:任意一个方阵与其伴随矩阵的乘法具有可交换性. 后一个等式表明:任意一个方阵与其伴随矩阵同为奇异阵或同为非奇异阵.

计算伴随矩阵是很麻烦的. 对于 2 阶方阵 A,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

不妨把它作为一个公式.

(8)方阵的逆矩阵

设 A 是 n 阶方阵,如果存在 n 阶方阵 B,满足

$$AB = E \text{ 或 } BA = E,$$

那么称方阵 A 可逆,称 B 是方阵 A 的逆矩阵,记作 A^{-1}. 如果满足上述条件的方阵 B 不存在,那么称方阵 A 不可逆,或方阵 A 的逆矩阵不存在.

定理 1 方阵 A 可逆的充分必要条件是 $|A| \neq 0$. 当 A 可逆时,A^{-1} 是唯一的,且

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*.$$

方阵 A 可逆的充分必要条件也可以表达成"A 是非奇异阵". 换言之,方阵 A 不可逆的充要条件是 A 为奇异阵.

方阵的逆矩阵满足

$$(A^{-1})^{-1} = A, (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, (A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}, |A^{-1}| = |A|^{-1}, (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

要注意 $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$.

计算方阵的逆矩阵是很麻烦的. 当 A 是 2 阶方阵时,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix};$$

当 A 是 n 阶对角阵时,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \end{bmatrix};$$

但是,要注意

$$\begin{bmatrix} 0 & & \lambda_1 \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \lambda_n & & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & & \frac{1}{\lambda_n} \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \frac{1}{\lambda_1} & & 0 \end{bmatrix}.$$

不妨把它们作为公式使用.

方阵 A 的可逆性可以带来一些方便的结果. 例如,当 A 可逆时,

$$AB = O \Rightarrow B = O, BA = O \Rightarrow B = O;$$

$AX = AY \Rightarrow X = Y, XA = YA \Rightarrow X = Y$;

$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$;

$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}$.

后两个关系式是解矩阵方程的理论基础.

3. 矩阵的初等变换

矩阵的初等变换本质上也是一种矩阵运算. 由于线性代数的绝大多数计算问题最后都可以归结成用矩阵的初等变换来解决,因此它具有特殊的意义.

1)矩阵的初等变换

类似于行列式的三条基本性质,对任意一个 $m \times n$ 矩阵作下列三种运算:

①对调矩阵的任意两行或任意两列.

②用非零常数乘矩阵中某一行或某一列的全体元素.

③把矩阵的某一行(列)的全体元素乘常数后加到另一行(列)的对应元素上.

称这三类运算为初等变换. 如果初等变换对行进行,则称为初等行变换;如果初等变换对列进行,则称为初等列变换. 矩阵经过初等变换之后,一般不再相等,常用记号"~"表示.

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过初等变换后成为 $\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$,称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价.

定理 2 $m \times n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价的充分必要条件是,存在 m 阶可逆阵 $\boldsymbol{P}$ 与 n 阶可逆阵 $\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ} = \boldsymbol{B}$.

定理 3 方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{E}$.

两个矩阵等价的必要条件是这两个矩阵是同型矩阵,因为初等变换不改变矩阵的行数与列数. 下面的内容是研究两个同型矩阵等价的充分必要条件. 定理 2 虽然简明,但实际上用来判定两个同型矩阵是否等价并不方便.

2)行阶梯形、行最简形与标准形

矩阵初等变换的目的是要把它变换成某些特殊形状的矩阵,这些特殊形状有三类.

(1)行阶梯形

要求矩阵的零行(即元素全是 0 的行)在下方,非零行(即至少有一个元素不是 0 的行)在上方;非零行的第一个非零元(所在列)的下方全是零,且其行指标 $i \leq$ 列指标 j.

(2)行最简形

在行阶梯形中,要求非零行的第一个非零元为 1,且其所在列的其他元素都是 0.

(3)标准形

在行最简形中,要求非零行的第一个非零元的行指标 $i =$ 列指标 j,且除此之外,所有元素都是 0.

任意一个矩阵经过行初等变换总可以变成行阶梯形与行最简形,对行最简形作列初等变换总可以变成标准形. 下面举一个例子说明这些变换的全过程. 对 4×5 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作行初等变换

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -9 & 4 & 18 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2r_1+r_3 \\ -3r_1+r_4}}{\overset{-2r_1+r_2}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{-\frac{5}{3}r_2+r_3}{\overset{r_2+r_4}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-\frac{4}{3}&4\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A_1.$$

这是一个行阶梯形，它有三个非零行. 继续作行初等变换，

$$A\sim A_1\overset{-\frac{3}{4}r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&-3&-1&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{-r_3+r_1}{\overset{r_3+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&0&7\\0&-3&-3&0&-9\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{3}r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-2&0&7\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{-r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&-3&0&4\\0&1&1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A_2.$$

这是一个行最简形，它仍是三个非零行. 现在作列初等变换，

$$A\sim A_2\overset{c_3\leftrightarrow c_4}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&0&-3&4\\0&1&0&1&3\\0&0&1&0&-3\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{-c_2+c_4\\-3c_2+c_5\\3c_3+c_5}}{\overset{\substack{3c_1+c_4\\-4c_1+c_5}}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

这就是标准形. 它依然是三个非零行.

两个同型矩阵等价的充分必要条件是，它们的行阶梯形（或行最简形、或标准形）中非零行的行数相等.

3）初等变换的应用

初等变换有许多应用. 例如，用于讨论矩阵的秩、向量组的相关性，解线性方程组等等.

（1）计算行列式的值

把初等变换的方法用到行列式上，这本质上是利用行列式的三条基本性质，可以得到一个上三角行列式. 于是，行列式的值为主对角线上全体元素之积.

（2）求逆矩阵

按定理3，对 $n\times 2n$ 矩阵 $(A\,\vdots\,E)$ 作行初等变换，当 A 可逆时，必定有 $(A\,\vdots\,E)\sim(E\,\vdots\,B)$. 方阵 B 恰是方阵 A 的逆矩阵 A^{-1}.

4. 矩阵的秩

在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列，这些行列交叉处的元素（按它们在 A 中的排列次序）所构成的 k 阶行列式称为矩阵 A 的一个 k 阶子式，$k=1,2,\cdots,\min(m,n)$. 一个 $m\times n$ 矩阵共有 $C_m^kC_n^k$ 个 k 阶子式.

如果矩阵 A 至少有一个 r 阶非零子式 D_r（即行列式 $D_r\neq 0$），且全体 $r+1$ 阶子式都等于0，那么称 D_r 为矩阵 A 的最高阶非零子式，正整数 r 称为矩阵 A 的秩，记作 $R(A)$.

零矩阵的任意阶子式都等于0，规定零矩阵的秩为0. 非零矩阵的秩必定大于或等于1. 于是，$m\times n$ 矩阵 A 的秩

$R(A)\in\{0,1,2,\cdots,\min(m,n)\}$.

设 A 是 n 阶方阵，A 可逆的充分必要条件是 $R(A)=n$. 由于这时 $R(A)$ 达到最大值 n，因此称可逆阵 A（即非奇异阵）为满秩阵，称不可逆阵（即奇异阵）为降秩阵.

定理 4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个同型矩阵，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

对任意一个矩阵 A，总是可以通过初等变换把 A 变成行阶梯形（或行最简形、或标准形），而行阶梯形（或行最简形、或标准形）的秩恰是非零行的行数. 因此，由定理 4 得到求矩阵秩的一般方法：对矩阵作初等变换，把它变成行阶梯形（或行最简形、或标准形），其非零行的行数就是原矩阵的秩. 对阶数稍高的矩阵，这个方法比"判断矩阵的各阶子式是否为零"方便.

矩阵的秩有下列性质.

①$R(A^{\mathrm{T}})=R(A)$.

②$R(A)=0\Leftrightarrow A=\boldsymbol{O}$.

③$R(A)=1\Leftrightarrow A=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两个非零列向量.

④矩阵增加 1 行或增加 1 列后，新矩阵的秩或者不变，或者增加 1.

⑤$\max\{R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B})\}\leqslant R(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$，其中矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B})$ 表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合在一起得到的新矩阵.

⑥$R(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})$.

⑦$R(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(R(\boldsymbol{A}),R(\boldsymbol{B}))$，当 $\boldsymbol{B}$ 是可逆阵时，$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{A})$，当 $\boldsymbol{A}$ 是可逆阵时，$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B})$.

⑧如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$；那么，$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$，其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times l$ 矩阵.

矩阵秩的概念是讨论线性代数问题的理论基础，它与矩阵的初等变换一起构成解决线性代数问题的两大支柱.

【例 1.6-7】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 n 阶方阵，下列等式成立的是（　　）.

(A) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$　　(B) $(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$

(C) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$　　(D) $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$

解：(A)不正确，因为

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2,$$

但不能保证 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 同样理由推得(B)、(C)都不正确，因为

$$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{ABAB}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{B},\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{B};$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2.$$

(D)正确，因为

$$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}(2\boldsymbol{E})+(2\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}+(2\boldsymbol{E})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}^2=\boldsymbol{A}^2+4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}.$$

故选(D).

【例 1.6-8】 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 n 维列向量，下列运算无意义的是（　　）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A\alpha}$　　(B) $\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$　　(C) $\boldsymbol{\alpha A}$　　(D) $\boldsymbol{A\alpha}$

解：(A)有意义，它是 $1\times n$ 阵、$n\times n$ 阵、$n\times 1$ 阵依次相乘，乘得的结果是 1×1 阵，即是一个数.(B)有意义，它是 $n\times 1$ 阵与 $1\times n$ 阵相乘，乘得的结果是 n 阶方阵.(D)有意义，它是 $n\times n$ 与 $n\times 1$ 阵相乘，乘得的结果是列向量.(C)无意义，因为 $n\times 1$ 阵与 $n\times n$ 阵不能相乘. 故选(C).

【例 1.6-9】 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，下列等式不正确的是（　　）.

(A) $|A^TB|=|B||A|$　　(B) $(AB)^T=A^TB^T$

(C) $||A|B|=|A|^n|B|$　　(D) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

解:(A)正确,因为

$$|A^TB|=|A^T||B|=|A||B|=|B||A|.$$

(C)正确,因为$|A|$是个数,记$|A|=\lambda$,则

$$||A|B|=|\lambda B|=\lambda^n|B|=|A|^n|B|.$$

(D)是逆矩阵的性质.(B)不正确,因为

$$(AB)^T=B^TA^T\neq A^TB^T.$$

故选(B).

【例1.6-10】 设A,B是n阶对称阵,Λ是对角阵,下列矩阵中不是对称阵的是(　　).

(A) $A+2E$　　(B) $A+\Lambda$　　(C) AB　　(D) $A-B$

解:(A)、(B)、(D)都正确,因为$2E$与Λ都是对称阵,

$$(A+2E)^T=A^T+(2E)^T=A+2E,$$

$$(A+\Lambda)^T=A^T+\Lambda^T=A+\Lambda,$$

$$(A-B)^T=A^T-B^T=A-B.$$

(C)不正确,因为

$$(AB)^T=B^TA^T=BA,$$

但不能保证$BA=AB$,因而AB不是对称阵.故选(C).

一般地,两个对称阵相乘不再是对称阵.要使乘积为对称阵的充分必要条件是它们可交换.证明如下:设A、B是对称阵,当$AB=BA$时,

$$(AB)^T=B^TA^T=BA=AB,$$

即AB是对称阵;反之,当AB是对称阵时,

$$AB=(AB)^T=B^TA^T=BA.$$

【例1.6-11】 设A,B是n阶方阵,且$AB=O$.则下列等式成立的是(　　).

(A) $A=O$ 或 $B=O$　　(B) $BA=O$

(C) $(A+B)^2=A^2+B^2$　　(D) $(BA)^2=O$

解:(A)不成立,例如,

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix},$$

则　$$AB=O,BA=\begin{bmatrix}2&2\\-2&-2\end{bmatrix}.$$

这个反例也表明(B)、(C)都不成立.(D)成立,这是因为

$$(BA)^2=(BA)(BA)=B(AB)A=BOA=O.$$

故选(D).

【例1.6-12】 设A是n阶方阵,且$A^2=A$.下列等式正确的是(　　).

(A) $A^{2004}=A$　　(B) $A=E$　　(C) $|A|=1$　　(D) $A=O$ 或 $A=E$

解:(A)正确,因为

$$A^{2004}=A^2A^{2002}=AA^{2002}=A^{2003}=\cdots=A^2=A.$$

(B)不正确,例如$A=O$.这也表明(C)不正确.(D)不正确,例如,

$$A=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}=A.$$

故选(A).

【例1.6-13】 设$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{bmatrix}$,求$A^{-1}$.

解:首先用对角线法则计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{vmatrix}=0+2+0-(-2)-(-2)-0=6.$$

由于$|A|\neq0$,因此A可逆. 下面用两种方法求A^{-1}.

(1)用公式$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$. 为了得到伴随矩阵A^*,先计算9个代数余子式:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}2&2\\-1&0\end{vmatrix}=2,A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1&-1\\-1&0\end{vmatrix}=1,A_{31}=\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}=2,A_{22}=\begin{vmatrix}1&-1\\1&0\end{vmatrix}=1,A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}0&2\\1&-1\end{vmatrix}=-2,A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}=2,A_{33}=\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}=2.$$

于是,

$$A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&1&4\\2&1&-2\\-2&2&2\end{bmatrix}.$$

(2)用行初等变换求逆矩阵A^{-1}.

$$(A\,\vdots\,E)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&2&2&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right]\underset{\frac{1}{2}r_2}{\overset{-r_1+r_3}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&-2&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\underset{\frac{1}{3}r_3}{\overset{2r_2+r_3}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&-1&1&0&0\\0&1&1&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]\underset{r_3+r_1}{\overset{-r_3+r_2}{\sim}}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&1&0&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right]$$

$$\overset{-r_2+r_1}{\sim}\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&\frac{2}{3}\\0&1&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{6}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{array}\right].$$

于是

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & 2\end{bmatrix}.$$

【例 1.6-14】 设矩阵 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}$. 解下列矩阵方程，求矩阵 X.

(1) $AX=B$;

(2) $XA=B$.

解：由于 $|A|=-1$，因此 A 是可逆阵，且

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

(1) 由于 $X=A^{-1}B$，因此

$$X=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}.$$

(2) 由于 $X=BA^{-1}$，因此

$$X=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 4 & 6\\ 8 & 7 & 9\end{bmatrix}.$$

仔细的读者也许发现：A^{-1} 与 A 相同，且 $A^{-1}B$ 恰是把 B 作初等行变换 $r_1\leftrightarrow r_2$；BA^{-1} 恰是把 B 作初等列变换 $c_1\leftrightarrow c_2$. 这不是巧合，它反映了初等变换与矩阵乘法之间的联系. 方阵 A 是在单位阵 E 的基础上作初等变换 $r_1\leftrightarrow r_2$ 或 $c_1\leftrightarrow c_2$ 得到的. 这类方阵称为初等阵. $A^{-1}=A$ 左乘 B 相当于对 B 作同类型的行初等变换，右乘 B 相当于对 B 作同类型的列初等变换.

【例 1.6-15】 设方阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $P=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. 试求 $(P^{-1}AP)^k$，其中 k 是正整数.

解：由于 $|P|=1$，因此 P 是可逆阵，且

$$P^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}.$$

按矩阵乘法运算的性质，则

$$\begin{aligned}(P^{-1}AP)^k&=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)\cdots(P^{-1}AP)\\ &=P^{-1}A(PP^{-1})A(PP^{-1})\cdots(PP^{-1})AP\\ &=P^{-1}A^kP.\end{aligned}$$

当 k 为偶数时，$A^k=E$. 于是

$$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}EP=P^{-1}P=E;$$

当 k 为奇数时，$A^k=A$. 于是

$$(P^{-1}AP)^k=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&-3\\-1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-12\\4&7\end{bmatrix}.$$

【例 1.6-16】 设三阶方阵 $A=E+B$，其中 $B=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$，试求 A^{10}.

解：三阶方阵 B 具有下列特点：

$$B^2=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},B^k=O,k\geqslant 3.$$

因此， $A^{10}=(E+B)^{10}=E^{10}+\sum_{i=1}^{9}C_{10}^{i}E^{10-i}B^{i}+B^{10}=E+\sum_{i=1}^{2}C_{10}^{i}B^{i}=E+10B+45B^2$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&10&0\\0&0&10\\0&0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&45\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&10&45\\0&1&10\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【例 1.6-17】 设 A,B 是 n 阶方阵，下列命题正确的是(　　).

(A)若 A,B 都是可逆阵，则 $A+B$ 也是可逆阵

(B)若 $A+B$ 是可逆阵，则 A、B 中至少有一个是可逆阵

(C)若 AB 不是可逆阵，则 A、B 也都不是可逆阵

(D)若 $A^{\mathrm{T}}A=E$，则 $|A|=1$ 或 -1

解：(A)不正确，例如 $A=E,B=-E$ 都是可逆阵，但 $A+B=O$ 不可逆.(B)不正确，例如

$$A=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

都不可逆，但 $A+B=E$ 是可逆阵.(C)不正确，例如，$A=E$ 是可逆阵，$B=O$ 不是可逆阵，但 $AB=O$ 不是可逆阵.(D)正确，因为 $|A^{\mathrm{T}}A|=|E|=1$，而

$$|A^{\mathrm{T}}A|=|A^{\mathrm{T}}||A|=|A||A|=|A|^2=1.$$

故选(D).

【例 1.6-18】 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $|-5A^*A^{-1}|$ 等于(　　).

(A)10　　(B)-10　　(C)-250　　(D)250

解：由于 $|A^*|=|A|^{3-1}=2^2=4$，$|A|^{-1}=|A|^{-1}=2^{-1}=\frac{1}{2}$，因此

$$|-5A^*A^{-1}|=(-5)^3|A^*||A^{-1}|=(-125)\times 4\times\frac{1}{2}=-250.$$

故选(C).

【例 1.6-19】 设 3 阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $|A^*+A^{-1}|$ 等于(　　).

(A)$\frac{5}{2}$　　(B)$\frac{27}{2}$　　(C)27　　(D)$\frac{9}{2}$

解:由定理 1 推得 $A^{-1}=\frac{1}{2}A^*$,于是

$$|A^*+A^{-1}|=\left|A^*+\frac{1}{2}A^*\right|=\left|\frac{3}{2}A^*\right|=\left(\frac{3}{2}\right)^3|A^*|=\frac{27}{8}|A|^{3-1}=\frac{27}{8}\times 2^2=\frac{27}{2}.$$

故选(B).

本题按定理 1 也可以解题如下:$A^*=2A^{-1}$,于是

$$|A^*+A^{-1}|=|2A^{-1}+A^{-1}|=|3A^{-1}|=3^3|A^{-1}|=27|A|^{-1}=27\times\frac{1}{2}=\frac{27}{2}.$$

【例 1.6-20】 设 3 阶方阵 A 满足 $A^2=O$,则下列等式成立的是(　　).

(A)$A=O$　　(B)$R(A)=0$　　(C)$A^3=O$　　(D)$R(A)=3$

解:(A)不正确,例如

$$A=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},A^2=O,$$

但 $A\neq O$.(B)不正确,因为 $R(A)=0$ 等价于 $A=O$.(D)不正确,因为 $R(A)=3$ 等价于 $|A|\neq 0$,即 A 是可逆阵,但由 $A^2=O$ 可推出 $|A|^2=0$,即 $|A|=0$,这表明题目中的 A 是不可逆阵.(C)正确,因为

$$A^3=A^2A=OA=O.$$

故选(C).

【例 1.6-21】 设 3 阶方阵 $A=\begin{bmatrix}1&-2&0\\2&-4&-1\\a&b&c\end{bmatrix}$,已知 A 是奇异阵,则 $R(A)$ 等于(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)与 a,b,c 取值有关

解:由于 $A\neq O$,因此 $R(A)\geq 1$. 由于 A 有一个 2 阶子式

$$D_2=\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}=-1\neq 0,$$

因此 $R(A)\geq 2$. 由于 A 是奇异阵,即 $|A|=0$,且 A 无其他 3 阶子式,因此 $R(A)<3$. 从而确定 $R(A)=2$,故选(B).

一般地,如果矩阵 A 有一个 r 阶子式不等于 0,那么可以推得 $R(A)\geq r$. 如果矩阵 A 的全体 r 阶子式都等于 0,那么可以推得 $R(A)<r$.

1.6.3 n 维向量

研究向量组的性质与结构是线性代数的一个基本课题. 这为讨论线性方程组的求解、二次型的标准化铺平道路.

1. n 维向量组

n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所构成的数组

$$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

称为 n 维向量. n 维向量与前面的行向量本质是相同的,因此,也称 α 为 n 维行向量(或 n 维行矩阵),也可以用方括号记作 $\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$. 同样,$n$ 维向量也可以用列向量(或列矩阵)表示成

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \quad 或\ \boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}.$$

规定向量的运算按矩阵运算的规则进行. 于是,行向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 表示列向量;列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 表示行向量.

若干个同维数的向量合在一起称为向量组. 例如,m 个 n 维行向量

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,\cdots,m$$

合在一起便构成一个向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$.

有限个向量构成的向量组与矩阵存在一一对应关系. 例如,上述行向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 与一个 $m\times n$ 矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\\boldsymbol{\alpha}_2\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

对应. m 个 n 维列向量

$$\boldsymbol{\beta}_i=\begin{pmatrix}b_{1i}\\b_{2i}\\\vdots\\b_{ni}\end{pmatrix},i=1,\cdots,m$$

构成的列向量组 $B:\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 与一个 $n\times m$ 矩阵

$$B=[\boldsymbol{\beta}_1\quad \boldsymbol{\beta}_2\cdots\quad \boldsymbol{\beta}_m]=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1m}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nm}\end{bmatrix}$$

对应. 反之,给定一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ 有 m 行,把每一行看成一个行向量,这 m 个 n 维行向量所构成的行向量组称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组;$\boldsymbol{A}$ 有 n 列,把每一列看成一个列向量,这 n 个 m 维列向量所构成的列向量组称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组. 例如,单位阵 $\boldsymbol{E}_n$ 的行(列)向量组为

$$向量组\ \boldsymbol{E}_n\begin{array}{l}\boldsymbol{e}_1=(1,0,0,\cdots,0),\\\boldsymbol{e}_2=(0,1,0,\cdots,0),\\\vdots\\\boldsymbol{e}_n=(0,0,0,\cdots,1),\end{array}$$

称 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 为单位坐标向量. 当 $n=3$ 时,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 恰是空间解析几何中的 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$.

有时候,向量组由无限个 n 维向量构成. 这时不能再与矩阵一一对应. 例如,全体 n 维向量构成的向量组(记作 R^n).

2. 向量组的相关性

给定向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$. 下面介绍三个重要的定义.

①如果有一个向量$\boldsymbol{\beta}$与一组数$k_1,\cdots,k_m$满足

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m,$$

那么称向量$\boldsymbol{\beta}$是向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的线性组合,或称$\boldsymbol{\beta}$可以由向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示.

②如果有一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0},$$

那么称向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关.

③如果②中要求的一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$不存在,即当

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}$$

时必定有$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,那么称向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

零向量可以用任意一个向量组线性表示,因为取$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$,总有等式

$$\boldsymbol{0}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m$$

成立.如果除了这种全为0的数组之外,还能找到一组$k_1,k_2,\cdots,k_m$使得上式成立,那么向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$便线性相关;否则向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关.

对于任意一个n维向量$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)$,等式

$$\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+b_n\boldsymbol{e}_n$$

总是成立.这表明任意一个n维向量总可以用单位坐标向量组$E_n:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性表示.

定理5 给定向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$及与其对应的$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$.

①向量组A线性相关的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})<$向量的个数m.

②向量组A线性无关的充分必要条件是$R(\boldsymbol{A})=$向量的个数m.

这条定理给出了判断向量组相关性的一般方法.由于矩阵的秩等于其行阶梯形(或行最简形、或标准形)中非零行的行数,因此通过初等变换可以判断所给向量组的相关性.

当向量组所含向量个数与向量维数相等(即定理5中$m=n$)时,向量组A所对应的矩阵$\boldsymbol{A}$是一个n阶方阵.向量组的相关性可以用$\boldsymbol{A}$的行列式来判断:

①向量组A线性相关的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|=0$.

②向量组A线性无关的充分必要条件是$|\boldsymbol{A}|\neq0$.

对于2维、3维向量组,这个方法较方便.

当向量组所含向量个数大于向量维数(即定理5中$m>n$)时,向量组必定线性相关,因为向量组所对应的$m\times n$矩阵$\boldsymbol{A}$的秩

$$R(\boldsymbol{A})\leqslant n<m.$$

例如5个4维向量必定线性相关.

定理6 向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性相关的充分必要条件是:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$中至少有一个向量可以用其余向量线性表示.

这条定理不能明确向量组A中究竟哪一个向量可以用其余向量线性表示.

定理7 如果向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关,而向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m,\boldsymbol{\beta}$线性相关,那么$\boldsymbol{\beta}$必定可以由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性表示,且表示方式(即数$k_1,k_2,\cdots,k_m$)是唯一的.

任意一个n维向量$\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)$总可以用单位坐标向量组$E_n:\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$唯一线性表示,这是因为:向量组$E_n$对应的单位阵$\boldsymbol{E}_n$的行列式$|\boldsymbol{E}_n|=1\neq0$,$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n$线性无关,但$n+1$个$n$维向量$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n,\boldsymbol{\beta}$必定线性相关.

线性表示、线性相关与线性无关这三个概念可以借助于矩阵的乘法来表达. 设向量组 A 由行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成,行向量组 A 对应的矩阵是 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$.

线性表示的定义可以等价地表示成:存在 m 维行向量 $(k_1,\cdots,k_m)$ 使得 n 维行向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,\cdots,b_n)$ 满足

$$(k_1,\cdots,k_m)\boldsymbol{A}=(b_1,\cdots,b_n)$$

或转置后表示成

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

线性相关的定义可以等价地表示成:存在 m 维非零行向量 $(k_1,\cdots,k_m)$ 使得

$$(k_1,\cdots,k_m)\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0},$$

其中 $\boldsymbol{0}$ 是 n 维行向量. 如果不存在 m 维非零行向量 $(k_1,\cdots,k_m)$ 使得上式成立,那么向量组 A 线性无关.

对于列向量组 A,对应的矩阵是 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,线性表示的定义式应改成

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix};$$

线性相(无)关的定义式应改成

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}_{n\times 1}.$$

这些形式在线性方程组中经常出现.

3. 向量组的最大无关组与秩

给定一个向量组 A(A 可以含有限个向量,也可以含无限个向量),如果在向量组 A 中能选出 r 个(有限个)向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$,满足

①$\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

②向量组 A 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关,那么称向量组 $A_0:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 为向量组 A 的最大线性无关向量组(简称为最大无关组),称正整数 r 为向量组 A 的秩.

"最大无关"的含义是,向量组中能找出的线性无关的向量个数达到最大,这个最大值便是向量组的秩. 例如,单位坐标向量组 $E_n:\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 是全体 n 维向量构成的向量组 R^n 的一个最大无关组,向量组 R^n 的秩等于 n. 这是因为,$\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ 线性无关,且 $n+1$ 个 n 维向量必定线性相关.

如果向量组仅由零向量构成,那么此向量组找不到最大无关组,规定此类向量组的秩为0.

向量组的最大无关组一般不唯一,但是向量组的秩是唯一确定的. 例如,全体 3 维向量构成的向量组 R^3 中,

$$\text{向量组 } A_0:\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,0,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(1,1,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_3&=(1,1,1)\end{aligned}$$

也是向量组 R^3 的一个最大无关组，且向量组 R^3 的秩 =3.

定理 8 如果向量组 A 由有限个向量构成，且对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，那么向量组的秩 $=R(\boldsymbol{A})$.

这条定理表明，可以通过初等变换求向量组的秩.

最大无关组的定义中②也可以等价地表示成："对于向量组 A 中任意一个向量 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 都线性相关，"还可以等价地表示成："对于向量组 A 中任意一个向量 $\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}$ 都可以用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示."

给定两个向量组 A 与 B，如果向量组 A 中任意一个向量都能由向量组 B 线性表示，那么称向量组 A 可以由向量组 B 线性表示. 如果两个向量组 A 与 B 可以相互线性表示，那么称向量组 A 与向量组 B 等价.

任意一个向量组 A 总是与它自己的最大无关组 A_0 等价. 如果已知向量组 A 的最大无关组 A_0，向量组的秩 $=r$，那么，向量组 A 中任意 r 个线性无关的向量都是向量组 A 的最大无关组，且与原最大无关组 A_0 等价；反之，向量组 A 中与最大无关组 A_0 等价的任意向量组（由 r 个向量构成）都是最大无关组，从而必定线性无关.

向量组的等价与矩阵的等价是有区别的. 例如，

$$\text{向量组 } A:\begin{matrix}(1,0)\\(0,1)\end{matrix}\ \text{与向量组 } B:\begin{matrix}(1,0)\\(0,1)\\(1,1)\end{matrix}$$

是等价的，但是对应的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不等价，因为它们不是同型矩阵. 又如，

向量组 A:(1,0) 与向量组 B:(0,1)

不等价，因为它们不能相互线性表示，但是对应的矩阵 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

定理 9 如果向量组 A 可以由向量组 B 线性表示，那么向量组 A 的秩 ≤ 向量组 B 的秩.

定理 10 如果向量组 A 与向量组 B 等价，那么它们的秩相等.

定理 10 的逆定理不成立. 例如：向量组 A 与 B 分别为

$$\text{向量组 } A:\begin{matrix}(1,0)\\(2,0)\end{matrix},\quad \text{向量组 } B:\begin{matrix}(0,1)\\(0,2)\end{matrix},$$

向量组 A 的秩与向量组 B 的秩都等于 1，但是它们不能相互线性表示. 然而，如果向量组 A 的秩 = 向量组 B 的秩，且向量组 A 可以由向量组 B 线性表示，那么向量组 B 也可以由向量组 A 线性表示，从而这两个向量等价.

向量组的等价与初等变换有密切的联系.

定理 11 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过行初等变换成为 $\boldsymbol{B}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价；如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过列初等变换成为 $\boldsymbol{B}$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组等价.

4. 向量的内积

矩阵的乘积运算中有一类问题比较特殊：同维数的行向量与列向量相乘是一个数. 设 n 维列向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

称数 $x^{T}y$ 为向量 x 与 y 的内积,记作 $[x,y]$,即

$$[x,y]=x^{T}y=y^{T}x=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n.$$

当 $n=3$ 时,内积恰是向量代数中的数量积.

由于 $x^{T}x\geqslant 0$,因此称 $\sqrt{[x,x]}$ 为向量 x 的范数(或 x 的模,或 x 的长度),记作 $\|x\|$,即

$$\|x\|=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x^{T}x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}.$$

范数等于 1 的向量称为单位向量. 对任意一个非零向量 x, $\frac{1}{\|x\|}x$ 必定是单位向量. 向量的范数为 0 的充分必要条件是:它为零向量.

如果两个向量 x 与 y 的内积为 0,即 $[x,y]=0$,那么称向量 x 与 y 正交. 零向量与任意一个向量正交.

如果由非零向量构成的向量组中任意两个向量都正交(称为两两正交),那么称这个向量组为正交向量组.

定理 12 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是一个正交向量组,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 必定线性无关.

定理 12 表明,由 n 维向量构成的正交向量组最多只可能含有 n 个向量.

设 A 是 n 阶方阵,如果 A 满足

$$AA^{T}=E,$$

那么称 A 是正交阵.

当 A 是正交阵时, $|A|=\pm 1$. 当 A 与 B 都是正交阵时, AB 也是正交阵.

下列命题都是 A 为正交阵的充分必要条件.

①$A^{T}A=E$.

②$A^{-1}=A^{T}$.

③A 的行向量组是正交向量组,且全体向量都是单位向量.

④A 的列向量组是正交向量组,且全体向量都是单位向量.

单位阵 E 与 $-E$ 是最简单的正交阵. 又如,

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\frac13 & \frac23 & \frac23\\ \frac23 & \frac13 & -\frac23\\ \frac23 & -\frac23 & \frac13\end{bmatrix}$$

也都是正交阵.

【例 1.6-22】 设 A 是 n 阶方阵, $n\geqslant 3$. 已知 $|A|=0$,则下列命题正确的是(　　).

(A) A 中某一行元素全为 0

(B) A 的第 n 行是前 $n-1$ 行(作为行向量)的线性组合

(C) A 中有两列对应元素成比例

(D) A 中某一列是其余 $n-1$ 列(作为列向量)的线性组合

解:(A)不正确. 例如,

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},|A|=0.$$

这个反例也说明(B)、(C)不正确.(D)正确,因为$|A|=0$表明方阵A的列向量组线性相关,由定理6得到,至少有一个列向量可以用其余列向量线性表示.故选(D).

举出反例是不容易的,本题也可以作如下分析.$|A|=0$是方阵A的n列(行)线性相关的充分必要条件.现在前三个选项都是$|A|=0$的充分条件,而不是必要条件;按定理6,第四个选项是充分必要条件.

【例1.6-23】 3维向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$线性无关的充分必要条件是(　　).

(A)对任意一组不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,都有$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m\neq\boldsymbol{0}$

(B)向量组A中任意两个向量都线性无关

(C)向量组A是正交向量组

(D)$\boldsymbol{\alpha}_m$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$线性表示

解:(B)与(D)是向量组线性无关的必要条件,但不是充分条件.(C)是向量组线性无关的充分条件,但不是必要条件.(A)是向量组线性无关定义的正确叙述,即不存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$,使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\boldsymbol{0}.$$

故选(A).

为了加深理解,下面给出反例.针对(B),设

$$\text{向量组}A:\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,0,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(0,1,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_3&=(1,1,0)\end{aligned}$$

线性相关,但是向量组A中任意两个向量都线性无关.针对(C),设

$$\text{向量组}A:\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,0,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(1,1,0)\\ \boldsymbol{\alpha}_3&=(1,1,1)\end{aligned}$$

线性无关,但是向量组A不是正交向量组,因为$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2]=1$,即$\boldsymbol{\alpha}_1$与$\boldsymbol{\alpha}_2$不正交.针对(D),设

$$\text{向量组}A:\begin{aligned}\boldsymbol{\alpha}_1&=(1,1,1)\\ \boldsymbol{\alpha}_2&=(2,2,2)\\ \boldsymbol{\alpha}_3&=(1,2,3)\end{aligned}$$

线性相关,但是$\boldsymbol{\alpha}_3$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$线性表示.

【例1.6-24】 设向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,t),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)$线性相关,则$t$等于(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)0

解:由向量组A线性相关推得对应矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式为0.于是,由

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&-1&0\\2&1&t\\0&1&1\end{vmatrix}=3-t=0,$$

得到$t=3$.故选(C).

【例1.6-25】 设$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,2,5,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,0,1,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,-5,0,3)$.试问向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是否线性相关?

解:对向量组对应的矩阵作初等变换:

$$A=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&5&3\\2&0&1&3\\4&-5&0&3\end{bmatrix}\underset{-2r_2+r_3}{\overset{-r_2+r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&4&0\\2&0&1&3\\0&-5&-2&-3\end{bmatrix}$$

$$\underset{-r_3}{\overset{-2r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&2&4&0\\0&-4&-7&3\\0&5&2&3\end{bmatrix}\overset{r_3+r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&4&0\\0&1&-5&6\\0&5&2&3\end{bmatrix}\overset{-5r_2+r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&2&4&0\\0&1&-5&6\\0&0&27&-27\end{bmatrix},$$

由于行阶梯形有三个非零行,$R(A)=3=$向量个数,因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关.

[例1.6-26] 设列向量组A对应的矩阵

$$A=[\boldsymbol{\alpha}_1\quad\boldsymbol{\alpha}_2\quad\boldsymbol{\alpha}_3\quad\boldsymbol{\alpha}_4\quad\boldsymbol{\alpha}_5]=\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0\\2&1&2&1&3\\1&2&-1&0&3\\3&0&5&2&1\end{bmatrix},$$

求向量组A的最大无关组与秩.

解:对矩阵A作行初等变换:

$$A\underset{\substack{-r_1+r_3\\-3r_1+r_4}}{\overset{-2r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0\\0&3&-4&-1&3\\0&3&-4&-1&3\\0&3&-4&-1&1\end{bmatrix}\underset{-r_2+r_4}{\overset{-r_2+r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0\\0&3&-4&-1&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-2\end{bmatrix}$$

$$\overset{r_3\leftrightarrow r_4}{\sim}\begin{bmatrix}1&-1&3&1&0\\0&3&-4&-1&3\\0&0&0&0&-2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},$$

由于行阶梯形有三个非零行,$R(A)=3$,因此向量组A的秩$=3$.向量组A的最大无关组可以如下得到:3个非零行的第一个非零元处于4×5矩阵A的第1、2、5列,因此$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5$构成一个最大无关组.

对求最大无关组的方法作一说明.这个方法适用于列向量组.如果题目中给出的是行向量组,那么要先把向量组对应的矩阵A作转置运算,然后对A^{T}作行初等变换.

[例1.6-27] 设向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,试问,向量组$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$是否线性无关?

解:设常数k_1,k_2,k_3满足$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$,即

$$k_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0},$$

整理后得到

$$(k_1+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_1+k_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}.$$

由于$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$线性无关,因此,必定有

$$\begin{cases}k_1\qquad+k_3=0,\\k_1+k_2\qquad=0,\\\qquad k_2+k_3=0.\end{cases}$$

由此解得 $k_1=k_2=k_3=0$. 这表明向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关.

本题的解法具有普遍意义.

【例 1.6-28】 设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$. 试问,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\beta}_4=\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是否线性无关?

解:取 $k_1=k_3=1,k_2=k_4=-1$,得到

$$\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3-\boldsymbol{\beta}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)-(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}.$$

由于 k_1,k_2,k_3,k_4 满足不全为 0,因此向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关.

本题与上题有两个不同:本题中向量组 A 含有偶数个向量,另外,本题中向量组 A 的相关性是未知的.

【例 1.6-29】 设向量组 $A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,试问,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 是否线性无关?

解:设常数 k_1,k_2,k_3 满足 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$,即

$$k_1(3\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2)+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+k_3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)=\mathbf{0}.$$

整理后得到

$$(3k_1+k_2+k_3)\boldsymbol{\alpha}_1+(-2k_1+k_2-k_3)\boldsymbol{\alpha}_2=\mathbf{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$、$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,因此,必定有

$$\begin{cases}3k_1+k_2+k_3=0,\\-2k_1+k_2-k_3=0.\end{cases}$$

这个方程组有非零解,例如,$k_1=2,k_2=-1,k_3=-5$. 因此,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

即使除去题目中"线性无关"的条件,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 仍是线性相关的. 例如 $k_1=2,k_2=-1,k_3=-5$ 仍满足 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3=\mathbf{0}$. 实际上,这类问题可以通过比较向量组所包含向量的个数来判断相关性. 如果 B 组向量可以用 A 组向量线性表示,向量组 A 含有 m 个向量,向量组 B 含有 l 个向量,那么,当 $l>m$ 时,向量组 B 必定线性相关,且与 A 组向量是否线性相关无关. 本题中,由 $m=2,l=3$ 立刻可以得出 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

1.6.4 线性方程组

线性方程组是二元一次、三元一次方程组的推广形式. 要求掌握解的讨论、解的性质、解的结构与求解方法.

1. 线性方程组

由 n 个未知数,m 个一次方程构成的方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

称为线性方程组. 借助于矩阵与向量,线性方程组可以表示成向量方程(即矩阵方程):

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},$$

其中 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为系数矩阵,列向量 $\boldsymbol{x}$ 为未知向量,即

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix},\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}.$$

向量方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解称为线性方程组的解向量.

当常数向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 时,称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$为齐次线性方程组;当常数向量 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 为非齐次线性方程组.

线性方程组与向量组的线性表示、线性相关与线性无关存在内在的联系. 设向量组 A 由 m 个 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 构成,其中

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),i=1,\cdots,m.$$

行向量组 A 对应的矩阵是 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$. 在 1.6.3 的 2 中曾经借助于矩阵的乘法来表达线性表示、线性相关与线性无关这三个概念. 现在用线性方程组来表达这三个概念.

线性表示的定义可以等价地表示成:非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 有解,其中系数矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $n\times m$ 矩阵,行向量 $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 要注意,这个非齐次线性方程组未知数的个数是 m,方程的个数是 n. 线性相关的定义可以等价地表示成:齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解,其中零向量$\boldsymbol{0}$是 n 维列向量. 线性无关的定义可以等价地表示成:齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$无非零解.

对于齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$,零向量总是它的一个解,称这个解为零解. 如果非零向量 $\boldsymbol{x}_0$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解(即满足 $\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$),那么称这个非零向量 $\boldsymbol{x}_0$ 为非零解.

以下假定系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,即未知数个数 $=n$,方程个数 $=m$,记 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r$,记 $s=n-r$.

2. 线性方程组解的讨论

对于齐次与非齐次线性方程组解的讨论对象是不同的.

(1)齐次线性方程组

给定齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$.

①$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=r<n$.

②$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 无非零解的充分必要条件是 $R(\boldsymbol{A})=r=n$.

③当 $m<n$ 时,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必定有非零解.

(2)非齐次线性方程组

给定非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 如果方程组有解,那么称它是相容的;如果方程组无解,那么称它是不相容的. 记 $m\times(n+1)$矩阵

$$\tilde{A}=[\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b}]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix},$$

并称 $\tilde{A}$ 为非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵.

①$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $R(\tilde{A})=R(\boldsymbol{A})=r$.

②$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的充分必要条件是 $R(\tilde{A})=R(\boldsymbol{A})=r=n$.

③$Ax=b$ 有无限多个解的充分必要条件是 $R(\tilde{A})=R(A)=r<n$.

④$Ax=b$ 无解的充分必要条件是 $R(\tilde{A})>R(A)$.

增广矩阵 $\tilde{A}$ 是在系数矩阵 A 的基础上增加一列得到的,因此增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩或者等于 $R(A)$,或者等于 $R(A)+1$.

3. 线性方程组解的性质

齐次与非齐次线性方程组解的性质有本质的差异.

①如果 $x=\xi_1,x=\xi_2,\cdots,x=\xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的解,那么任意一个线性组合 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_t\xi_t$ 依然是 $Ax=0$ 的解.

②如果 $x=\eta_1,x=\eta_2,\cdots,x=\eta_t$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解,那么,当 $\sum\limits_{i=1}^{t}k_i=1$ 时,$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 是 $Ax=b$ 的解;当 $\sum\limits_{i=1}^{t}k_i=0$ 时,$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 是 $Ax=0$ 的解.

③如果 $x=\xi$ 是 $Ax=0$ 的解,η 是 $Ax=b$ 的解,那么 $\xi+\eta$ 是 $Ax=b$ 的解.

4. 线性方程组解的结构

在齐次或非齐次线性方程组中,常常遇到有无限多个解,需要写出通解(假定 $r<n$).

(1)齐次线性方程组

给定齐次线性方程组 $Ax=0$. 它的全体解向量所构成的向量组记作 S. 称解向量组 S 的最大无关组为齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系. 解向量组 S 的秩 $s=n-r$. 记基础解系为 $\xi_1,\cdots,\xi_s$. $Ax=0$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s,$$

其中 $k_1,\cdots,k_s$ 为任意数.

基础解系 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 必定满足以下三个条件.

①$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $Ax=0$ 的解.

②$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性无关.

③如果 ξ 是 $Ax=0$ 的解,那么 ξ 必定可以用 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 线性表示.

反之,满足上述三个条件的向量组必定是 $Ax=0$ 的基础解系. 基础解系一般不唯一,但是基础解系所含向量个数是唯一的,它必定等于 $s=n-r$.

(2)非齐次线性方程组

给定非齐次线性方程组 $Ax=b$. 如果 η 是 $Ax=b$ 的某个解,$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$ 是 $Ax=0$ 的基础解系,那么 $Ax=b$ 的通解为

$$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_s\xi_s+\eta,$$

其中 $k_1,\cdots,k_s$ 为任意数.

非齐次线性方程组不存在基础解系.

5. 解线性方程组

用初等变换不仅可以知道线性方程组解的情况,而且可以求出它的通解.

对齐次线性方程组 $Ax=0$,通过对系数矩阵 A 作行初等变换,变成行阶梯形即可知道它是否有非零解,在有非零解的情形下,变成行最简形即能写出它的通解.

对非齐次线性方程组 $Ax=b$,通过对增广矩阵 $\tilde{A}$ 作行初等变换,变成行阶梯形即可知道它是否有解,在有解的情形下,变成行最简形即能写出它的通解.

【例 1.6-30】 齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

是否有非零解？如果有非零解，求出方程组的通解.

解：对系数矩阵 A 作行初等变换，把它变成行阶梯形：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \overset{-r_1+r_2}{\underset{-3r_1+r_3}{\sim}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{2}r_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{-r_2+r_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 $n=4$，$r=R(A)=2$，$r<n$，因此齐次方程组必有非零解. 继续作行初等变换，把 A 变成行最简形：

$$A \overset{r_2+r_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}.$$

齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 是同解方程组，即与

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \quad - x_4 = 0 \\ \qquad x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \quad 或 \begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 \\ x_3 = 2x_4 \end{cases}$$

同解. 令 $x_2 = k_1$，$x_4 = k_2$ 便得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 \\ k_1 \\ 2k_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

其中 k_1, k_2 是任意数.

在本题中，由于 $m=3$，$n=4$，$m<n$，因此立即可以推出 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 必有非零解. 另外，通解中的两个解向量

$$\boldsymbol{\xi}_1 = [1,1,0,0]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\xi}_2 = [1,0,2,1]^{\mathrm{T}}$$

是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【例 1.6-31】 讨论非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

解的情况. 如果有无限多个解，求出方程组的通解.

解：对增广矩阵 $\bar{A}$ 作行初等变换，把它变成行阶梯形：

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1&1&-2&1&1\\2&2&-4&1&2\\1&1&-2&-1&1\end{bmatrix}\underset{-r_1+r_3}{\overset{-2r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&1\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}$$

$$\overset{-r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&-2&0\end{bmatrix}\overset{2r_2+r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-2&1&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

由于 $n=4,R(\widetilde{A})=2,R(A)=2=r,r<n$，因此非齐次线性方程组必有无限多个解. 继续作行初等变换，把 $\widetilde{A}$ 变成行最简形：

$$\widetilde{A}\overset{-r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-2&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

原方程组与

$$\begin{cases}x_1+x_2-2x_3\quad=1\\ \qquad\qquad\quad x_4=0\end{cases}\text{或}\begin{cases}x_1=-x_2+2x_3+1\\ x_4=0\end{cases}$$

是同解方程组. 令 $x_2=k_1,x_3=k_2$，便得通解

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1+2k_2+1\\k_1\\k_2\\0\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}2\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

其中 k_1,k_2 是任意数.

在本题中，$\boldsymbol{\eta}=[1,0,0,0]^{\mathrm T}$ 是非齐次线性方程组的一个特解，而

$$\boldsymbol{\xi}_1=[-1,1,0,0]^{\mathrm T},\boldsymbol{\xi}_2=[2,0,1,0]^{\mathrm T}$$

是相应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系.

【例 1.6-32】 当 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3,\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

有解？无解？有唯一解？有无限多个解？如果有无限多个解，求出方程组的通解.

解：对增广矩阵 $\widetilde{A}$ 作行初等变换，把它变成行阶梯形：

$$\widetilde{A}=\begin{bmatrix}1+\lambda&1&1&0\\1&1+\lambda&1&3\\1&1&1+\lambda&\lambda\end{bmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\1&1+\lambda&1&3\\1+\lambda&1&1&0\end{bmatrix}$$

$$\underset{-(1+\lambda)r_1+r_3}{\overset{-r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&-\lambda&-2\lambda-\lambda^2&-\lambda-\lambda^2\end{bmatrix}\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&1+\lambda&\lambda\\0&\lambda&-\lambda&3-\lambda\\0&0&-\lambda(3+\lambda)&(1-\lambda)(3+\lambda)\end{bmatrix}.$$

当 $\lambda\neq0,\lambda\neq-3$ 时，$R(\widetilde{A})=3,R(A)=3=n$，因此非齐次线性方程组有唯一解. 当 $\lambda=0$ 时，$R(\widetilde{A})=2,R(A)=1$，方程组无解. 当 $\lambda\neq0$ 时，$R(\widetilde{A})=R(A)$，方程组有解. 当 $\lambda=-3$ 时，$R(\widetilde{A})=2,R(A)=2=r<n$，方程组有无限多个解.

当 $\lambda=-3$ 时，对 $\tilde{A}$ 继续作行初等变换，把 $\tilde{A}$ 变成行最简形：

$$\tilde{A}\sim\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{-\frac{1}{3}r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&-2&-3\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\overset{-r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

原方程组与

$$\begin{cases}x_1\quad -x_3=-1\\ x_2-x_3=-2\end{cases}\quad 或\begin{cases}x_1=x_3-1\\ x_2=x_3-2\end{cases}$$

是同解方程组. 令 $x_3=k_1$，便得通解

$$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1-1\\k_1-2\\k_1\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\end{bmatrix},$$

其中 k_1 是任意数.

在本题中，$m=n=3$，即方程个数与未知数个数相等. 在这种情形下，也可以用行列式来讨论，以回避带有字母 λ 的初等变换. 由系数矩阵 A 的行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\lambda^2$$

推得 $\lambda\neq0,\lambda\neq-3$ 时方程组有唯一解. 对于 $\lambda=0,\lambda=-3$ 的情况分别用初等变换讨论.

【例 1.6-33】 设 A 是 4×5 矩阵，ξ_1,ξ_2 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则下列结论正确的是(　　).

(A)$\xi_1-\xi_2,\xi_1+2\xi_2$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系

(B)$k_1\xi_1+k_1\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的通解

(C)$k_1\xi_1+\xi_2$ 是 $Ax=0$ 的通解

(D)$\xi_1-\xi_2,\xi_2-\xi_1$ 也是 $Ax=0$ 的基础解系

解：由题设知道，$n=5,s=n-r=2,r=3$. (B)不正确，因为 $k_1\xi_1+k_1\xi_2=k_1(\xi_1+\xi_2)$ 只含有一个不定常数. 同样理由说明(C)也不正确. (D)不正确，因为

$$(\xi_1-\xi_2)+(\xi_2+\xi_1)=0,$$

这表明 $\xi_1-\xi_2$ 与 $\xi_2-\xi_1$ 线性相关. (A)正确，因为 $\xi_1-\xi_2$ 与 $\xi_1+2\xi_2$ 都是 $Ax=0$ 的解，且它们线性无关，故选(A).

在本题中要注意，当 $s=n-r$ 已知时，齐次线性方程组的任意 s 个线性无关的解向量都构成基础解系.

【例 1.6-34】 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-1,\\ 2x_1-x_2-x_3=2,\\ ax_1+bx_2+cx_3=d\end{cases}$$

有两个不同的解，则增广矩阵 $\tilde{A}$ 的秩等于(　　).

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)秩与 a,b,c,d 的值有关

解：由题设知道，$n=3$. 由于系数矩阵 A 中有 2 阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0,$$

因此，$r=R(A)\geqslant 2$. 因为方程组有2个不同的解蕴含了它有无限多个解，所以 $R(\bar{A})=R(A)=r<3=n$，综合起来得到 $r=R(\bar{A})=2$. 故选(B).

1.6.5 矩阵的相似

本段假定 A 是 n 阶方阵.

1. 特征值与特征向量

给定一个 n 阶方阵 A，如果数 λ 与非零列向量 x 满足

$$Ax=\lambda x \text{ 或 } (A-\lambda E)x=0,$$

那么称数 λ 为 A 的特征值，称非零向量 x 为 A 的对应特征值 λ 的特征向量.

记 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$，这是一个关于 λ 的 n 次多项式，称 $f(\lambda)$ 为矩阵 A 的特征多项式，称一元 n 次方程 $f(\lambda)=0$ 为特征方程. 特征方程的根就是方阵 A 的特征值. n 阶方阵 A 有 n 个特征值，其中包括实数特征值与虚数特征值，且重根按其重数计算个数.

设 λ_0 是 A 的一个特征值，即 $|A-\lambda_0 E|=0$. 这时，齐次线性方程组 $(A-\lambda_0 E)x=0$ 必定有非零解，全体非零解向量都是 A 的对应于特征值 λ_0 的特征向量.

2. 特征值的性质

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的特征值，$A=(a_{ij})_{n\times n}$.

①$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$,

$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$.

②A^{T} 的特征值也是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$.

③A 为奇异阵的充分必要条件是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中至少有1个是0.

④当 A 为可逆阵时，A^{-1} 的特征值是 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$.

⑤$\varphi(\lambda_i)$ 是 $\varphi(A)$ 的特征值，$i=1,\cdots,n$，其中多项式 $\varphi(\lambda)=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_m\lambda^m$，矩阵多项式

$$\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m.$$

⑥当 A 是 n 阶实对称阵时，特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 全是实数.

3. 特征向量的性质

给定 n 阶方阵 A，则：

①相应特征值 λ_0 的特征向量必定有无限多个；

②每个特征向量只能相应一个特征值；

③相应不同特征值的特征向量必定线性无关；

④当 A 是 n 阶实对称时，相应于不同特征值的特征向量必定正交，且有 n 个两两正交的特征向量.

4. 矩阵的相似

给定两个 n 阶方阵 A,B. 如果可逆阵 P 满足

$$P^{-1}AP=B,$$

那么称矩阵 A 与 B 相似，称 B 是 A 的相似矩阵. 可逆阵 P 称为相似变换矩阵.

①当 A 与 B 相似，B 与 C 相似时，A 与 C 相似.

②当 A 与 B 相似时，A 与 B 的秩相等，且 A 与 B 等价.

③当 A 与 B 相似时，A 与 B 的特征多项式相同，从而 A 与 B 的特征相同，且 $|A|=|B|$.

5. 矩阵的相似对角化

当 n 阶方阵 A 与对角阵 Λ 相似时，即可逆阵 P 满足

$$P^{-1}AP=\Lambda$$

其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix},P=[p_1\cdots p_n]$$

那么 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 恰是 A 的特征值，且 p_i 恰是 A 的对应特征值 λ_i 的特征向量，$i=1,\cdots,n$.

定理13　n 阶方阵 A 能与对角阵相似的充分必要条件是：A 有 n 个线性无关的特征向量.

判断 n 阶方阵 A 能否与对角阵相似常用以下两种充分条件.

①当 A 有 n 个不同特征值时，A 能与对角阵相似.

②当 A 有 n 阶实对称阵时，A 能与对角阵相似.

n 阶方阵 A 与对角阵 Λ 相似的定义给出了求 Λ 与变换矩阵 P 的方法. 但要注意有相等特征值的情况. 例如，某个特征值重复出现3次（即特征方程有3重根），则相应要找出3个线性无关的特征向量. 如果不存在3个线性无关的特征向量，那么 A 不能与对角阵相似.

【例1.6-35】　已知方阵 A 满足 $|A+2E|=0$，则 A 必定有特征值（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)-1　　(D)-2

解：特征多项式 $f(\lambda)=|A-\lambda E|$ 在 $\lambda=-2$ 处的值恰是 $f(-2)=|A+2E|=0$. 这表明 $\lambda=-2$ 是特征方程 $f(\lambda)=0$ 的根，-2 是 A 的特征值. 故选(D).

一般地，如果已知 $|aA-bE|=0$，$a\neq0$，那么，由

$$|aA-bE|=\left|a\left(A-\frac{b}{a}E\right)\right|=a^n\left|A-\frac{b}{a}E\right|=0$$

推得 $\frac{b}{a}$ 是 A 的特征值.

【例1.6-36】　设3是方阵 A 的特征值，则 A^2+A-2E 必有特征值（　　）.

(A)3　　(B)10　　(C)4　　(D)不能确定

解：由于多项式 $\varphi(\lambda)=\lambda^2+\lambda-2$，$A^2+A-2E=\varphi(A)$，因此，$\varphi(A)$ 必有特征值

$$\varphi(3)=3^2+3-2=10.$$

故选(B).

【例1.6-37】　已知3阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & x & -2\\ -4 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

的特征值为 $-4,5,y$，则 x,y 分别等于（　　）.

(A)$-1,0$　　(B)2,3　　(C)4,5　　(D)1,1

解：由 -4 是 A 的特征值推得 $|A+4E|=0$，即

$$|A+4E|=\begin{vmatrix}5 & -2 & -4\\ -2 & x+4 & -2\\ -4 & -2 & 5\end{vmatrix}=9x-36=0.$$

因此解得 $x=4$. 故选(C).

本题没有求出 y 的值不能令人放心. 由特征值的性质①,从 $x=4$ 及

$$-4+5+y=1+x+1$$

解得 $y=5$.

【例 1.6-38】 设 3 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

试求 A 的特征值与 3 个线性无关特征向量,并判断这些特征向量是否正交?

解:首先求特征值. 特征多项式

$$f(\lambda)=|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ -1 & -\lambda & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}\overset{r_2+r_3}{=\!=}\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)\begin{vmatrix}-\lambda & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2+\lambda-2)=-(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

于是 A 的特征值是 $-2,1,1$.

当 $\lambda=-2$ 时,求特征向量相当于解齐次线性方程组 $(A+2E)x=\mathbf{0}$. 由系数矩阵

$$A+2E=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\overset{r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\underset{-r_1+r_3}{\overset{r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overset{\frac{1}{3}r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\overset{-r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到一个特征向量 $p_1=[-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda=1$ 时,求特征向量相当于解齐次线性方程组 $(A-E)x=\mathbf{0}$. 由系数矩阵

$$A-E=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\underset{r_1+r_2}{\overset{-r_1+r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\overset{-r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

得到两个特征向量 $p_2=[1,0,1]^{\mathrm{T}}$, $p_3=[-1,1,0]^{\mathrm{T}}$.

由于 $P=[p_1p_2p_3]$ 的行列式不等于 0,因此 p_1,p_2,p_3 是 A 的 3 个线性无关的特征向量.

p_1 与 p_2 正交,因为 $[p_1,p_2]=(-1)\times1+(-1)\times0+1\times1=0$. 由于 A 是实对称阵,p_1,p_2 分别是不同特征值下的特征向量,因此它们必定正交. 按特征向量的性质④,A 有 3 个两两正交的特征向量. 尽管 p_3 与 p_1 正交,但 p_3 与 p_2 不正交. 这表明,即使 A 是实对称阵,相应同一特征值下的特征向量未必一定正交. 但是,如果在特征值 $\lambda=1$ 下取特征向量 $p_4=[-1,2,1]^{\mathrm{T}}$,可以验证 p_1,p_2,p_4 是两两正交的特征向量组.

由于 A 是实对称阵，A 必定能与对角阵相似. 由矩阵的相似对角化方法得知，对角阵 Λ 与相似变换阵 P 分别为

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},P=[p_1p_2p_3]=\begin{bmatrix}-1&1&-1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}.$$

它们满足 $P^{-1}AP=\Lambda$. 相似变换矩阵不唯一. 如果取变换矩阵 $Q=[p_1p_2p_4]$，可以验证 $Q^{-1}AQ=\Lambda$.

【例 1.6-39】 下列方阵中，不能与对角阵相似的是(　　).

(A) $\begin{bmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix}$　(C)零矩阵　(D) $\begin{bmatrix}\lambda_0&1\\0&\lambda_0\end{bmatrix}$

解:(A)与(C)都是对称阵，它们必定能与对角阵相似.(B)中矩阵有 3 个不同特征值，它必定能与对角阵相似. 故选(D).

记(D)中矩阵为 A，它的特征值 $\lambda=\lambda_0$、λ_0. 求特征向量相当于解齐次线性方程组 $(A-\lambda_0E)x=0$. 由于 $R(A-\lambda_0E)=1$，因此基础解系由 1 个解向量组成. 这表明 2 阶方阵 A 仅含 1 个线性无关的特征向量，A 不能与对角阵相似.

说明 A 不能与对角阵相似也可以用反证法来处理. 由于 A 的特征值 $\lambda=\lambda_0$、λ_0，因此，如果 A 能与对角阵相似，那么必定存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$，其中 $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_0&\\&\lambda_0\end{bmatrix}=\lambda_0E$. 于是，$A=P\Lambda P^{-1}=P(\lambda_0E)P^{-1}=\lambda_0E$. 这与已知 $A\neq\lambda_0E$ 相矛盾.

1.6.6 二次型

本段假定 A 是 n 阶实对称阵，即 $A^T=A$.

1. 二次型

设含有 n 个变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的二次齐次函数

$$f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n,$$

称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为二次型. 如果二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 中交叉项的系数($a_{ij},i\neq j$)全是 0，那么称它为二次型的标准形.

借助于矩阵的乘法，可以把二次型用简明的形式来表达. 令 $a_{ji}=a_{ij}$，于是，$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i,i\neq j$. 这时，

$$f(x_1,\cdots,x_n)=[x_1,\cdots,x_n]\begin{bmatrix}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\\\vdots\quad\vdots\qquad\vdots\\a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

因此，二次型可表达成

$$f(x)=x^TAx,$$

其中 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$，n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对称阵. 对称阵 A 称为二次型 f 的矩阵，而 f 称为对称阵 A 的二次型. 对称阵 A 与二次型 f 是一一对应的. 规定二次型 f 的秩就是对称阵 A 的秩. 例如，二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1$$

与对称阵

$$A=\begin{bmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$$

对应. 反之,对称阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

与二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2$$

对应.

二次型的标准形 $f(x_1,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2$ 与对角阵(它自然是一个对称阵)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&&&0\\&a_{22}&&\\&&\ddots&\\0&&&a_{nn}\end{bmatrix}$$

对应.

2. 二次型的标准化问题

给定一个二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$,如何寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\cdots\cdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n\end{cases}$$

使得 $f(x_1,\cdots,x_n)=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$,其中 $C=(c_{ij})_{n\times n}$,$|C|\neq 0$,这就是二次型的标准化问题. 通常记上述线性变换为

$$x=Cy$$

其中列向量 $y=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$.

把线性变换 $x=Cy$ 代入二次型得到

$$f=x^{\mathrm{T}}Ax=(Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy)=y^{\mathrm{T}}(C^{\mathrm{T}}AC)y=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2.$$

因此,二次型的标准化问题等价于寻找可逆阵 C 与对角阵

$$A=\begin{bmatrix}k_1&&&0\\&k_2&&\\&&\ddots&\\0&&&k_n\end{bmatrix}$$

使得 $C^{T}AC=\Lambda$.

定理 14 设 A 是 n 阶实对称阵，必定存在正交阵 P 与对角阵 Λ，使得

$$P^{-1}AP=\Lambda,\text{即 } P^{T}AP=\Lambda,$$

并且对角阵 Λ 主对角线上的元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 恰是 A 的 n 个特征值，正交阵 P 的 n 个列向量是 A 的两两正交的单位特征向量.

使用这条定理要注意正交阵中诸特征向量的排列次序. 当对角阵按 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 次序排列时，$P=[p_1p_2\cdots p_n]$，其中 p_i 是相应 λ_i 的特征向量.

由定理 14 得到，对于二次型 $f=x^{T}Ax$ 可作如下标准化：作正交变换（它自然是可逆的线性变换）$x=Py$，使得

$$f=(Py)^{T}A(Py)=y^{T}(P^{T}AP)y=y^{T}\Lambda y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

3. 矩阵的合同

给定两个 n 阶实对称阵 A、B. 如果存在可逆阵 C 满足

$$C^{T}AC=B,$$

那么称矩阵 A 与 B 合同. 可逆阵 C 称为合同变换矩阵.

①当 A 与 B 合同，B 与 C 合同时，A 与 C 合同.

②当 A 与 B 合同时，A 与 B 的秩相等，且 A 与 B 等价.

③当 A 与 B 相似，且相似变换 P 为正交阵（即 $P^{-1}=P^{T}$）时，A 与 B 合同.

由于二次型与对称阵一一对应，因此二次型的标准化问题与矩阵合同的对角化问题完全相同.

二次型的标准形不唯一，即与对称阵 A 合同的对角阵不唯一. 当然，与对称阵 A 合同的一切对角阵的秩都等于 $R(A)$，即对角阵中主对角线上非零元素个数都等于 $R(A)$.

定理 15 给定 n 阶实对称阵 A，与 A 合同的一切对角阵中主对角线上元素取正值的个数都相等. 给定二次型，它的一切标准形中系数取正值的个数（称为正惯性指数）都相等.

4. 正定性

给定二次型 $f(x)=x^{T}Ax$，其中 A 是 n 阶实对称阵. 如果对任意 $x_0\neq0$，都有 $f(x_0)=x_0^{T}Ax_0>0$，那么称 $f(x)$ 为正定二次型，称对称阵 A 为正定矩阵.

①二次型为正定的充分必要条件是它的正惯性指数等于 n.

②n 阶实对称阵为正定的充分必要条件是它的特征值全取正数.

③n 阶实对称阵 A 为正定的充分必要条件是 A 与 n 阶单位阵 E 合同.

④n 阶实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定的必要条件是 $a_{ii}>0,i=1,\cdots,n$.

定理 16 n 阶实对称阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正定的充分必要条件是 A 的各阶主子式都取正数，即

$$|a_{11}|>0,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0,\cdots,\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}>0.$$

【例 1.6-40】 已知二次型

$$f(x,y,z)=x^2+3y^2+az^2+2xy-4yz$$

的秩等于 2,则系数 a 等于(　　).

(A)0　　(B)1　　(C)2　　(D)不存在

解:二次型 f 对应的 3 阶对称阵

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&3&-2\\0&-2&a\end{bmatrix}.$$

由于 $R(A)=2$,因此,由 A 的行列式 $|A|=0$ 得到

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&3&-2\\0&-2&a\end{vmatrix}=2a-4=0,$$

即 $a=2$. 当 $a=2$ 时,对 A 作初等变换,把它变成行阶梯形:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&3&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}\overset{-r_1+r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{bmatrix}\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

于是 $R(A)=2$. 故选(C).

解题过程中校验 $R(A)=2$ 不可省. 如果发现 $R(A)\neq 2$,那么应选"不存在". 当然,本题中可以看出 A 有一个 2 阶子式

$$\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

因此必定有 $R(A)\geqslant 2$. 这表明由 $|A|=0$(这蕴含 $R(A)<3$)解得的 $a=2$ 自动保证 $R(A)=2$.

这类问题的一般解法是对 A 直接作初等变换,把它变成行阶梯形:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&3&-2\\0&-2&a\end{bmatrix}\overset{-r_1+r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\0&-2&a\end{bmatrix}\overset{r_2+r_3}{\sim}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\0&0&a-2\end{bmatrix}$$

由此知道,当 $a=2$ 时 $R(A)=2$.

【例 1.6-41】 已知 5 阶对称阵 A 的特征值为 $-1,0,0,1,1$,则二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的秩等于(　　).

(A)1　　(B)3　　(C)4　　(D)5

解:二次型 f 的秩等于 $R(A)$. 按定理 14,存在正交阵 P 与对角阵 Λ,使得 $P^{-1}AP=\Lambda$,其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&&&0\\&0&&&\\&&0&&\\&&&1&\\0&&&&1\end{bmatrix}.$$

由于 $R(\Lambda)=3$,且 A 与 Λ 相似(也合同),因此,$R(A)=R(\Lambda)=3$. 故选(B).

【例 1.6-42】 设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3.$$

求一个正交变换把 f 化成标准形,并写出标准形.

解:二次型 f 的对称阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&2&-2\\0&-2&3\end{bmatrix}.$$

首先求 A 的特征值. 由

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&0\\2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-4(1-\lambda)-4(3-\lambda)$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5)=(2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1)=0$$

得到三个特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=5$.

分别求不同特征值下的特征向量,并把它们单位化. 当 $\lambda_1=-1$ 时,对 $A+E$ 作初等变换:

$$A+E=\begin{bmatrix}2&2&0\\2&3&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}\overset{-r_1+r_2}{\sim}\begin{bmatrix}2&2&0\\0&1&-2\\0&-2&4\end{bmatrix}\overset{\frac{1}{2}r_1}{\underset{2r_2+r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{-r_2+r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&-2\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\xi_1=[-2,2,1]^{\mathrm{T}}$,单位化后得 $p_1=\frac{1}{3}[-2,2,1]^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_2=2$ 时,对 $A-2E$ 作初等变换:

$$A-2E=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&0&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}\overset{2r_1+r_2}{\sim}\begin{bmatrix}-1&2&0\\0&4&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}\overset{-r_1}{\underset{\frac{1}{2}r_2}{\sim}}\begin{bmatrix}1&-2&0\\0&2&-1\\0&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{r_2+r_3}{\underset{r_2+r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&2&-1\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{\frac{1}{2}r_2}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\xi_2=[2,1,2]^{\mathrm{T}}$,单位化后得 $p_2=\frac{1}{3}[2,1,2]^{\mathrm{T}}$. 当 $\lambda_3=5$ 时,对 $A-5E$ 作初等变换:

$$A-5E=\begin{bmatrix}-4&2&0\\2&-3&-2\\0&-2&-2\end{bmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{\sim}\begin{bmatrix}2&-3&-2\\-4&2&0\\0&-2&-2\end{bmatrix}\overset{2r_1+r_2}{\underset{-\frac{1}{2}r_3}{\sim}}\begin{bmatrix}2&-3&-2\\0&-4&-4\\0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\overset{-\frac{1}{4}r_2}{\sim}\begin{bmatrix}2&-3&-2\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}\overset{-r_2+r_3}{\underset{3r_2+r_1}{\sim}}\begin{bmatrix}2&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{\frac{1}{2}r_1}{\sim}\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

得特征向量 $\xi_3=[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$,单位化后得 $p_3=\frac{1}{3}[1,2,-2]^{\mathrm{T}}$.

综上所述,正交变换为

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2&2&1\\2&1&2\\1&2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix},$$

其中正交变换矩阵 $P=[p_1p_2p_3]$. 对角阵 $\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&0\\&2&\\0&&5\end{bmatrix}$. 从而二次型 $f=-y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$.

由于 P 是正交阵,因此,$P^TAP=\Lambda$ 推得 A 与 Λ 合同.

【例 1.6-43】 给定对角阵 $A=\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&0\end{bmatrix}$,下列对角阵中,能与 A 合同的是( ).

(A) $\begin{bmatrix}1&&\\&-2&\\&&3\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&0\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}-1&&\\&-2&\\&&0\end{bmatrix}$

解:A 的秩为 2,正惯性指数为 1.(A)不能与 A 合同,因为它的秩等于 3.(B)与(D)不能与 A 合同,因为正惯性指数分别为 2,0. 故选(C).

可以验证 $C^TAC=\Lambda$,其中

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-2&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

【例 1.6-44】 下列方阵中具有正定性的是( ).

(A) $\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix}-1&0\\0&2\end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix}2&-2\\-2&3\end{bmatrix}$

解:(A)不具有正定性,因为 $\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}=0$.(B)不具有正定性,因为有负特征值 -1.(C)不是对称阵,因此不具有正定性. 故选(D).

(D)中对称阵满足 $|a_{11}|=2>0$,$\begin{vmatrix}2&-2\\-2&3\end{vmatrix}=2>0$,因此由定理 16 推得它具有正定性.

1.7 概率与数理统计

要求:①了解随机事件与样本空间的概念,理解随机事件的概念,掌握事件的关系与运算.

②理解概率的概念,了解条件概率与事件独立性的概念,掌握概率的基本性质,会应用概率的加法公式、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式解决简单的应用问题.

③了解古典概型,会计算简单的古典型概率,会应用超几何概率公式与二项概率公式解决简单的应用问题.

④理解一维随机变量的概念,了解分布函数的概念与性质,了解离散型随机变量的概率分布与连续型随机变量的概率密度函数的概念,掌握应用分布函数、概率分布、概率密度函数计算与随机变量相联系的事件的概率.

⑤理解随机变量数学期望与方差的概念,掌握随机变量函数数学期望的性质与计算方法,了解标准差的概念.

⑥掌握二点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布、指数分布、正态分布及它们的数学期望与方差.

⑦了解矩、协方差与相关系数的概念,了解它们的性质与计算方法.

⑧了解总体、样本与统计量的概念,理解样本均值与样本方差的概念,了解样本均值与样本方差的简单性质,知道 χ^2 分布、t 分布与 F 分布.

⑨理解点估计的概念,会求简单的矩估计与最大似然估计,了解估计量的评选标准.

⑩了解区间估计的概念，会求正态总体中未知参数的置信区间.

⑪了解假设检验的概念，会对正态总体均值与方差作显著性检验.

概率与数理统计是研究随机现象的数学工具.要求读者通过复习初步掌握有关概率与数理统计知识的一些基本概念、基本理论与基本方法，并解决一些简单的应用问题.

1.7.1 随机事件与概率

直观上可以这样认识：在一定条件下，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件（简称为事件）；概率是随机事件发生可能性大小的一种度量.记事件 A 的概率为 $P(A)$，规定

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1.$$

必然事件（记作 Ω）与不可能事件（记作 Φ）是两个特殊的随机事件，规定

$$P(\Omega)=1, P(\Phi)=0.$$

1. 随机事件之间的运算

随机事件通常用集合（样本空间 Ω 的子集）形成来表达.复杂的随机事件可以通过简单随机事件的运算来体现.随机事件之间的运算本质上是集合的运算.

①对立事件（或逆事件）：事件 A 的对立事件表示"A 不发生"，记作 $\bar{A}$.

②和事件：事件 A 与 B 的和事件表示"A 与 B 中至少有一个发生"（即"A 发生或者 B 发生"），记作 $A+B$（或 $A\cup B$）.

③积事件：事件 A 与 B 的积事件表示"A 发生并且 B 发生"，记作 AB（或 $A\cap B$）.

④差事件：事件 A 与 B 的差事件表示"A 发生并且 B 不发生"，记作 $A-B$（或 $A\bar{B}$，或 $A-AB$）.

2. 随机事件之间的关系

随机事件之间常常存在某种内在联系，这种联系在数学上称为关系.

①包含：事件 B 包含事件 A 表示"当 A 发生时 B 必定发生"，记作 $B\supset A$（或 $A\subset B$）.

②相等：事件 A 与 B 相等表示"$A\subset B$ 并且 $B\subset A$"，记作 $A=B$.

③互不相容（或互斥）：事件 A 与 B 互不相容表示"A 与 B 不可能同时发生"，记作 $AB=\Phi$.

④对立（或互逆）：事件 A 与 B 对立表示"A 与 B 有且只有一个事件发生"，记作 $\bar{A}=B$（或 $\bar{B}=A$）.

⑤完备事件组：事件 $A_1,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组表示"$A_1,\cdots,A_n$ 两两互不相容，并且 $A_1+\cdots+A_n=\Omega$".当 $n=2$ 时，A 与 $\bar{A}$ 构成完备事件组.

⑥相互独立：事件 A 与 B 相互独立的直观意义是"A 与 B 是否发生相互不影响".事件 A 与 B 相互独立的数学定义是

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

3. 随机事件运算的性质

由于事件用集合来表示，因此集合运算的性质（例如交换律、结合律、分配律等）全都适用于事件的运算.特别指出下列德摩根法则：

$$\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}, \overline{AB}=\bar{A}+\bar{B}.$$

4. 条件概率

在事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率称为条件概率，记作 $P(B|A)$.条件概率的常用

计算公式为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\text{其中 } P(A)>0.$$

当事件 A 与 B 相互独立时,$P(B|A)=P(B)$,$P(A|B)=P(A)$.

5. 概率的计算公式

事件之间的运算与关系通过下列公式反映概率之间的联系.

①求逆公式:$P(\overline{A})=1-P(A)$.

②加法公式:$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. 当 A 与 B 互不相容时,$P(A+B)=P(A)+P(B)$.

③乘法公式:$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$. 当 A 与 B 相互独立时,$P(AB)=P(A)P(B)$.

④求差公式:$P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 当 $A\supset B$ 时,$P(A)\geqslant P(B)$,且 $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

⑤全概率公式:如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i)>0,i=1,\cdots,n$,那么

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i).$$

⑥贝叶斯公式(或逆概率公式):如果事件 $A_1,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组,且 $P(A_i)>0,i=1,\cdots,n$,$P(B)>0$,那么

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(A_j)P(B|A_j)},i=1,\cdots,n.$$

【例 1.7-1】 设 A,B,C 为三个事件,则 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 表示(　　).

(A)三个事件全发生　　(B)三个事件全不发生

(C)三个事件不全发生　　(D)至少有一个事件发生

解:按照德摩根法则,由

$$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}=\overline{ABC}$$

推得(C)成立.

事件的同一表达式可以有多种表示,但含义是相同的. 本题中 $\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$ 也表示 A,B,C 中至少有一个不发生,还可以表示 A,B,C 中不多于两个事件发生.

【例 1.7-2】 设事件 A 满足 $P(A)=0$,则(　　).

(A)事件 A 不可能发生　　(B)A 与任意一个事件 B 相互独立

(C)事件 $\overline{A}$ 必定发生　　(D)A 与任意一个事件 B 互不相容

解:由 $P(A)=0$ 推不出 $A=\Phi$(反例可见 1.7.3 中的连续型随机变量),因此(A)、(C)、(D)都不对. 故选(B).

这个问题也可以正面解答. 由于 $AB\subset A$,因此,由

$$0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$$

推得 $P(AB)=0$. 从而,$P(AB)=P(A)P(B)$成立,即事件 A 与 B 相互独立.

【例 1.7-3】 设 $P(A)=0.3$,$P(B)=0.4$. 在下列三种情形下,分别求 $P(A+B)$与 $P(A-B)$.

(1)A与B互不相容;

(2)A与B有包含关系;

(3)A与B相互独立.

解:(1)由$AB=\Phi$推得

$$P(A+B)=P(A)+P(B)=0.3+0.4=0.7,$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0=0.3.$$

(2)由于$P(B)>P(A)$,因此包含关系只能是$A\subset B$. 由$A+B=B,AB=A$分别推得

$$P(A+B)=P(B)=0.4,$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)=0.$$

(3)由于$P(AB)=P(A)P(B)=0.3\times0.4=0.12$,因此

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.3+0.4-0.12=0.58,$$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3-0.12=0.18.$$

【例1.7-4】 已知某台机器正常运转时,产品的合格品率达到90%;当机器发生故障时,产品的合格品率仅为30%. 通常机器发生故障的概率为25%.

(1)试求该机器的产品的合格品率;

(2)已知某日首件产品是合格品,求此时机器正常运转的概率.

解:设事件A表示"机器正常运转",则$\bar{A}$表示"机器发生故障". A与$\bar{A}$构成完备事件组,且

$$P(A)=0.75,P(\bar{A})=0.25.$$

设事件B表示"产品是合格品",则

$$P(B|A)=0.9,P(B|\bar{A})=0.3.$$

(1)由全概率公式得到

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})=0.75\times0.9+0.25\times0.3=0.75.$$

(2)由贝叶斯公式得到

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(\bar{A})P(B|\bar{A})}=\frac{0.675}{0.75}=0.9.$$

【例1.7-5】 设事件A,B满足$P(A)=0.2,P(\bar{B}|A)=0.4$,则$P(AB)$等于(　　).

(A)0.08　　(B)0.12　　(C)0.2　　(D)0.4

解:由于$P(B|A)=1-P(\bar{B}|A)=1-0.4=0.6$,因此,由乘法公式得到

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.2\times0.6=0.12.$$

故选(B).

1.7.2 古典概型

古典概型是一类最基本的概率模型.

1. 古典型概率

如果随机事件只可能产生有限个(记作n)不同的试验结果,且这些不同的结果出现具有等可能性,那么事件A的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

其中 m 为事件 A 所包含的不同试验结果的个数. 这个概率称为古典(型)概率.

计算古典概率的关键是处理"计数". 除了直接计数之外,常用的计数工具是排列组合知识.

2. 超几何概率公式

有一类古典概型值得引起特别的重视.

设 N 件产品中有 M 件次品,其余 $N-M$ 件是非次品,随机地从这 N 件产品中任取 n 件,则 n 件产品中恰有 k 件次品的概率为

$$P(A)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}.$$

这个公式称为超几何概率公式. 它是由古典概率计算公式推得的.

许多摸球问题都可以用超几何概率公式来解决.

3. 二项概率公式

如果做一次随机试验只可能是两个不同结果之一,那么称这类随机试验为伯努利试验. 通常把这两个结果称为"成功"与"失败". 记出现成功的概率为 p,则出现失败的概率为 $1-p$,其中 $0<p<1$.

设重复独立地做 n 次伯努利试验,则 n 次试验中恰出现 k 次成功的概率为

$$P(A)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}.$$

这个公式称为二项概率公式.

放回的摸球问题可以用二项概率公式来解决.

【例 1.7-6】 口袋里装有 10 只外形相同的球,其中 7 只红球,3 只白球. 从口袋中任意取出 2 只球,则它们是一只红球、一只白球的概率等于(　　).

(A) $\frac{21}{90}$　　(B) $\frac{21}{45}$　　(C) $\frac{21}{100}$　　(D) $\frac{21}{50}$

解:设事件 A 表示"取出一只红球、一只白球". 直接用超几何概率公式得到

$$P(A)=\frac{C_7^1 C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}.$$

故选(B).

本题也可以用古典概率计算公式来解决. 从 10 个球中任取 2 只,共有 C_{10}^2 种不同的结果,即 $n=C_{10}^2=45$. 从 10 个球中任意取出一个红球、一个白球,共有 $C_7^1C_3^1$ 种不同的结果,即 $m=C_7^1C_3^1=21$. 因此,

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{21}{45}.$$

【例 1.7-7】 盒子中装有 10 个晶体管,其中 7 个是一级品. 从盒子中任意取 2 次,每次 1 个. 在下列两种情形下,分别求取出的晶体管中恰有 1 个是一级品的概率.

(1)先取出的晶体管不放回盒子;

(2)先取出的晶体管放回盒子.

解:设事件 A 表示"取出的 2 只晶体管中 1 只是一级品,另一只不是一级品".

(1)这类模型可以视作"摸一次,取 2 只晶体管,其中恰有 1 只一级品". 于是,由超几何概率公式得到

$$P(A)=\frac{C_7^1C_3^1}{C_{10}^2}=\frac{21}{45}=\frac{7}{15}.$$

如果用古典概率计算公式来处理，那么考虑到次序问题，则 $n=10\times9=90$，$m=7\times3+3\times7=42$，$P(A)=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$. 这里计算 m 时要考虑两种情形：一级品既可能出现在第一次，也可能出现在第二次.

这个问题还可以用乘法公式来解决. 设事件 A_i 表示"第 i 次取到一级品"，$i=1,2$. 由 $A=A_1\bar{A}_2+\bar{A}_1A_2$ 得到

$$P(A)=P(A_1\bar{A}_2)+P(\bar{A}_1A_2).$$

在已知 A_1 发生的条件下，第二次取时，盒子中仅有 9 个晶体管，且其中 6 个是一级品，因此 $P(\bar{A}_2|A_1)=\frac{3}{9}$. 于是，由 $P(A_1)=\frac{7}{10}$得到

$$P(A_1\bar{A}_2)=P(A_1)P(\bar{A}_2|A_1)=\frac{7}{10}\times\frac{3}{9}=\frac{21}{90}.$$

类似地，$P(\bar{A}_1A_2)=\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{21}{90}$. 因此 $P(A)=\frac{21}{90}+\frac{21}{90}=\frac{7}{15}$.

(2)这类模型可以视作"重复独立地做 2 次伯努利试验". 把摸到 1 只一级品看成"成功"，$p=\frac{7}{10}$. 于是，由二项概率公式得到

$$P(A)=C_2^1\times0.7\times0.3=0.42.$$

如果用古典概率计算公式来处理，那么考虑到次序问题，则 $n=10\times10=100$，$m=7\times3+3\times7=42$，$P(A)=\frac{42}{100}$.

【例 1.7-8】 在例 1.7-7(1)中，第二次取到一级品的概率等于(　　).

(A)$\frac{6}{9}$　　(B)$\frac{7}{9}$　　(C)$\frac{7}{10}$　　(D)$\frac{6}{10}$

解：这是一个典型的"抽签"(俗称抓阄)模型. 这类问题必定满足"抽到的概率与次序无关". 由于第一次取到一级品的概率为 0.7，因此第二次取到一级品的概率也是 0.7. 故选(C).

如果直接计算，一般可用全概率公式. 设事件 A_i 表示"第 i 次取到一级品"，$i=1,2$. 由于 A_1 与 $\bar{A}_1$ 构成完备事件组，且

$$P(A_1)=\frac{7}{10},P(A_2|A_1)=\frac{6}{9},$$

$$P(\bar{A}_1)=\frac{3}{10},P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{7}{9},$$

于是，所求概率为

$$P(A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)+P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1)=\frac{7}{10}\times\frac{6}{9}+\frac{3}{10}\times\frac{7}{9}=\frac{63}{90}=0.7.$$

【例 1.7-9】 汽车途经 5 个交通路口，假定遇上红灯的概率都是 0.4，且相互独立，则汽车最多遇上一次红灯的概率等于(　　).

(A)0.34　　(B)0.36　　(C)0.38　　(D)0.4

解：这个问题可以视作"重复独立地做 5 次伯努利试验". 把遇上一次红灯看做"成功"，

$p=0.4$. 设事件 A 表示"最多遇上一次红灯",事件 A_i 表示"途经 5 个交通路口恰遇上 i 次红灯",$i=0,1$. 于是,由 $A=A_0+A_1$ 及二项概率公式得到

$$P(A)=P(A_0)+P(A_1)=C_5^0\times0.4^0\times0.6^5+C_5^1\times0.4\times0.6^4=0.337.$$

故选(A).

【例 1.7-10】 在 1,2,…,30 中任取一个数.

(1)求此数既能被 2 整除又能被 5 整除的概率;

(2)求此数能被 2 整除或能被 5 整除的概率.

解:任取一个数,事件 A 表示"它能被 2 整除",事件 B 表示"它能被 5 整除".

(1)事件 AB 表示"既能被 2 整除又能被 5 整除". 满足这样条件的数共 3 个,即 $m=3$. 由古典概率计算公式及 $n=30$ 得到 $P(AB)=\frac{3}{30}=0.1$.

(2)事件 $A+B$ 表示"能被 2 整除或能被 5 整除". 能被 2 整除的数共 15 个,能被 5 整除的数共 6 个. 由古典概率计算公式得到

$$P(A)=\frac{15}{30}=0.5,P(B)=\frac{6}{30}=0.2.$$

按加法公式,利用(1)中 $P(AB)=0.1$ 可得

$$P(A+B)=0.5+0.2-0.1=0.6.$$

在本例中,事件 A 与 B 是相互独立的,因为它们满足 $P(AB)=P(A)P(B)$. 这个结果从直观上看是不易发现的.

1.7.3 一维随机变量的分布和数字特征

随机变量是概率与数理统计中最重要、最基本的概念. 一切随机现象都可以通过随机变量来描述. 一维随机变量的取值范围(即样本空间)是实数轴$(-\infty,+\infty)$或它的一个子集,它总是一个数集.

1. 随机事件及其概率的表达

与以往用 $A,B,C,\cdots$ 表达随机事件的形式不同,引进随机变量 $X,Y,Z,\cdots$ 之后,随机事件常常通过关于随机变量的等式或不等式来表达,例如,$\{a<X\leqslant b\}$,$\{a\leqslant X\leqslant b\}$,$\{a<X<b\}$,$\{a\leqslant X<b\}$,其中 $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$,一般地,随机事件总是可以表达成 $\{X\in I\}$,其中数集 $I\subset(-\infty,+\infty)$.

随机事件表达形式的改变使得事件的内涵丰富了. 例如,由$\{|X|\leqslant1\}$与$\{X>2\}$的表达形式可知,这两个事件之间存在互不相容关系;由$\{|X|\leqslant1\}$与$\{X=1\}$的表达形式可知,这两个事件之间存在包含关系;由$\{|X|\leqslant1\}$与$\{|X|>1\}$的表达形式可知,这两个事件之间存在对立关系.

如果两个随机变量 X 与 Y 相互独立,那么,对任意两个集合 $I_1,I_2\subset(-\infty,+\infty)$,随机事件$\{X\in I_1\}$与$\{Y\in I_2\}$总是相互独立的.

随着事件表达形式的改变,事件的概率相应地记作 $P(a<X\leqslant b)$,$P(a\leqslant X\leqslant b)$,$P(a<X<b)$,$P(a\leqslant X<b)$,其中 $-\infty\leqslant a\leqslant b\leqslant+\infty$. 一般地,事件的概率可以记作 $P(X\in I)$,其中数集 $I\subset(-\infty,+\infty)$.

2. 一维随机变量的分布

引进随机变量之后,随机现象体现在随机变量取值的随机性上. 通常称随机变量取值的统

计规律性为随机变量的分布. 掌握了一个随机变量的分布,也就能计算有关该随机变量的一切随机事件的概率 $P(X\in I)$,其中 I 是任意一个数集,$I\subset(-\infty,+\infty)$.

随机变量分布的形式有3类:概率分布、概率密度函数与分布函数. 概率分布仅适用于离散型随机变量,概率密度函数仅适用于连续型随机变量,分布函数则可用于一切随机变量.

(1)离散型随机变量的概率分布

离散型随机变量 X 只可能取有限个值或一串值,以下记作 $x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots$. X 的概率分布可以用表格形式来表达,通常称为概率分布(表). X 的概率分布表为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P_r	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

其中 $\{x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots\}$ 是 X 的取值范围,一般按从小到大(沿数轴方向)排列;$p_k=P(X=x_k)>0,k=1,2,\cdots$,它们必定满足 $\sum\limits_k p_k=1$.

概率分布表中诸事件 $\{X=x_k\},k=1,2,\cdots$ 构成一个完备事件组. 因此,由概率分布表可以计算任意随机事件的概率:

$$P(X\in I)=\sum_{k:x_k\in I}p_k,$$

其中数集 $I\subset(-\infty,+\infty)$.

(2)连续型随机变量的概率密度函数

连续型随机变量 X 的取值范围通常是一个区间或若干区间之并. X 的概率密度函数 $p(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的实值函数,它必须满足

① $p(x)\geqslant 0,-\infty<x<+\infty$.

② $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\mathrm{d}x=1$.

连续型随机变量的取值范围可以理解成 $\{x\mid p(x)>0\}$.

由概率密度函数 $p(x)$ 可以计算任意随机事件的概率:

$$P(X\in I)=\int_I p(x)\mathrm{d}x,$$

其中数集 $I\subset(-\infty,+\infty)$.

由上述概率计算公式知道,对于连续型随机变量

$$P(X=x_0)=0,$$

其中 x_0 是任意一个实数. 这里要注意,事件 $\{X=x_0\}\neq\Phi$,因为 $\{X=x_0\}$ 是可能发生的. 这个特性是离散型随机变量所不具有的. 由此还可得到:

$$P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a\leqslant X<b)=\int_a^b p(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$.

(3)随机变量的分布函数

对于一切随机变量 X,X 的分布函数定义为

$$F(x)=P(X\leqslant x),-\infty<x<\infty.$$

分布函数 $F(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的实值函数.

分布函数必定具有下列四条特征性质.

①有界性：$0\leqslant F(x)\leqslant 1,-\infty<x<+\infty$.

②单调性：当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

③右连续：$\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0)$.

④ $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$.

反过来，如果一个定义域为$(-\infty,+\infty)$的实值函数具有上述四条性质，那么 $F(x)$ 必定是某个随机变量的分布函数.

由分布函数 $F(x)$ 可以计算任意随机事件的概率：

$$P(a<X\leqslant b)=F(b)-F(a),$$

$$P(X=x_0)=F(x)-\lim_{x\to x_0^-}F(x),$$

其中 $-\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty$，$x_0$ 是任意实数. 例如，

$$P(1\leqslant X\leqslant 2)=P(1<X\leqslant 2)+P(X=1)=[F(2)-F(1)]+[F(1)-\lim_{x\to 1^-}F(x)]$$

$$=F(2)-\lim_{x\to 1^-}F(x).$$

由此看出，利用分布函数计算概率在实际操作中是比较麻烦的. 因此，在知道离散型随机变量的概率分布或连续型随机变量的概率密度函数时，建议不要用分布函数计算概率，要用概率分布或概率密度函数来计算.

当 X 是离散型随机变量时，按分布函数的定义，由概率分布可以计算分布函数：

$$F(x)=\sum_{k:x_k\leqslant x}p_k,\ -\infty<x<+\infty.$$

这是一个阶梯状的函数，且在 $x=x_k$ 有跳跃间断点，跳跃度恰是 p_k. 当 $x\neq x_k$ 时，$F(x)$ 在该处连续.

当 X 是连续型随机变量时，按分布函数的定义，由概率密度函数可以计算分布函数：

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t,\ -\infty<x<+\infty.$$

由高等数学中积分上限函数的知识推得：连续型随机变量的分布函数是连续函数，而不仅仅是右连续函数，且在 $p(x)$ 的连续点处，

$$F'(x)=p(x).$$

因此，连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 本质上是其概率密度函数 $p(x)$ 的一个原函数. 这些特性对离散型随机变量不适用.

(4) 常用随机变量的分布

常用的离散型随机变量有三类.

①二点分布（或伯努利分布）

参数为 $p(0<p<1)$ 的二点分布的概率分布表为

X	0	1
P_i	$1-p$	p

二点分布的取值范围是$\{0,1\}$，且规定 $p=P(X=1)$.

二点分布是伯努利试验的数量化表示. 伯努利试验中试验结果“成功”与“$X=1$”对应，试验结果“失败”与“$X=0$”对应. 因此，随机变量 X 表示一次伯努利试验后出现成功的次数.

②二项分布

参数为 n,p(n 是自然数,$0<p<1$)的二项分布的概率分布为

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,\cdots,n.$$

二项分布的取值范围是 $\{0,1,\cdots,n\}$.

服从参数为 n,p 的二项分布的随机变量 X 表示:重复独立地做 n 次伯努利试验后出现成功的次数.

③泊松分布

参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的泊松分布的概率分布为

$$P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, k=0,1,2,\cdots.$$

泊松分布的取值范围是 $\{0,1,2,\cdots\}$.

常用的连续型随机变量有三类.

①均匀分布

参数为 $a,b(-\infty<a<b<+\infty)$ 的均匀分布的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\text{①}\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\text{②}\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

②指数分布

参数为 $\lambda(\lambda>0)$ 的指数分布的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

③正态分布

参数为 $\mu,\sigma^2(-\infty<\mu<+\infty,\sigma>0)$ 的正态分布的概率密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty<x<+\infty.$$

正态分布通常用记号 $N(\mu,\sigma^2)$ 表示. 当 $\mu=0,\sigma^2=1$ 时,称 $N(0,1)$ 为标准正态分布.

当 X 服从 $N(0,1)$ 时,分布函数记为 $\Phi(x)$,即

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t, -\infty<x<+\infty.$$

$\Phi(x)$ 的值可以查表得到. $\Phi(x)$ 满足

① "$a<x<b$"也可以写成"$a\leqslant x\leqslant b$",因为这不会影响积分. 连续型随机变量的概率密度函数都有这个特点.

② "$a\leqslant x<b$"也可以写成"$a\leqslant x\leqslant b$",因为 $F(x)$ 是连续函数. 连续型随机变量的分布函数都有这个特点.

$$\Phi(0)=\frac{1}{2};$$

$$\Phi(-x)=1-\Phi(x),\ -\infty<x<+\infty.$$

$\Phi(x)$的这两条性质是由其概率密度函数为偶函数决定的.一般地,对任意一个连续型随机变量,只要它的概率密度函数 $p(x)$ 是偶函数,那么,其分布函数 $F(x)$ 必定满足

$$F(0)=\frac{1}{2};$$

$$F(-x)=1-F(x),\ -\infty<x<+\infty.$$

当 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$ 时,任意事件的概率

$$P(a<X\leqslant b)=\Phi(b)-\Phi(a),\ -\infty\leqslant a<b\leqslant+\infty.$$

由于 $\Phi(x)$ 是分布函数,因此 $\Phi(-\infty)=0,\Phi(+\infty)=1$.上式对 $P(a\leqslant X\leqslant b),P(a<X<b)$,$P(a\leqslant X<b)$ 同样成立.

当 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 时,X 的分布函数为

$$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),\ -\infty<x<+\infty.$$

任意事件的概率

$$P(a<X\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),\ -\infty\leqslant a<b<+\infty.$$

定理1 如果 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,那么 $Y=kX+c$ 服从正态分布 $N(k\mu+c,k^2\sigma^2)$.特殊地,$\frac{X-\mu}{\sigma}$服从标准正态分布 $N(0,1)$.

定理表明正态随机变量的线性函数依然服从正态分布.称$\frac{X-\mu}{\sigma}$为标准化变换,其意义见下面随机变量的数字特征.

3.一维随机变量的数字特征

随机变量的分布全面反映了随机变量取值的统计规律性,随机变量的数字特征则局部地反映随机变量取值的某些主要特征.随机变量的数字特征的含义是:用某些实数来反映随机变量分布的主要特征.

随机变量数字特征的常用形式有三类:数学期望、方差与标准差.

(1)数学期望

随机变量 X 的数学期望反映了 X 的平均取值,记作 $E(X)$.

当 X 为离散型随机变量时,如果 X 的概率分布表为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
P_r	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

那么规定 X 的数学期望为

$$E(X)=\sum_k x_k p_k;$$

规定随机变量函数 $Y=f(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[f(X)]=\sum_k f(x_k)p_k.$$

当 X 为连续型随机变量时，如果 X 的概率密度函数为 $p(x)$，那么规定 X 的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x;$$

规定随机变量函数 $Y=f(X)$ 的数学期望为

$$E(Y)=E[f(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)p(x)\mathrm{d}x.$$

数学期望有下列性质：

①$E(c)=c$，其中 c 是常数；

②$E(kX)=kE(X)$，其中 k 是常数；

③$E(X+c)=E(X)+c$，其中 c 是常数；

④$E(kX+lY+c)=kE(X)+lE(Y)+c$，其中 k,l,c 是常数；

⑤当 X 与 Y 相互独立时，$E(XY)=E(X)E(Y)$.

解题时一般用数学期望的性质比较方便，但要注意上述性质适用的条件.

(2)方差与标准差

随机变量的方差与标准差都反映了随机变量取值相对于其数学期望的波动程度. $D(X)$ 表示随机变量 X 的方差，$\sqrt{D(X)}$ 表示随机变量 X 的标准差.

对于任意一个随机变量 X，规定 X 的方差为

$$D(X)=E[X-E(X)]^2.$$

方差的常用计算公式为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

这个公式表明，计算方差的基础是计算数学期望.

方差有下列性质：

①$D(c)=0$，其中 c 是常数；

②$D(kX)=k^2D(X)$，其中 k 是常数；

③$D(X+c)=D(X)$，其中 c 是常数；

④当 X 与 Y 相互独立时，

$$D(kX+lY+c)=k^2D(X)+l^2D(Y),\quad \text{其中 } k,l,c \text{ 是常数}.$$

使用方差的性质要仔细. 例如，当 $D(X)=2$ 时，$D(-X)=(-1)^2\times2=2$，而不是 $D(-X)=-D(X)$. 方差 $D(X)\geqslant0$，且方差 $D(X)=0$ 的充分必要条件是 X 为常数，即

$$P(X=c)=1,$$

其中 $c=E(X)$.

(3)中心化与标准化

给定随机变量 X，称 $X_*=X-E(X)$ 为 X 的中心化随机变量，称 $X^*=\dfrac{X-E(X)}{\sqrt{D(X)}}$ 为 X 的标准化随机变量. 由数学期望与方差的性质得到：

$$E(X_*)=0,D(X_*)=D(X);$$

$$E(X^*)=0,D(X^*)=1.$$

如果某个连续型随机变量 X 的概率密度函数关于 $x=\mu$ 对称，那么，当 X 的数学期望存在时必定有 $E(X)=\mu$.

(4)常用随机变量的数字特征

常用随机变量的数字特征可以作为已知值直接使用.

①当 X 服从参数为 p 的二点分布时,

$$E(X)=p,D(X)=p(1-p).$$

②当 X 服从参数为 n,p 的二项分布时,

$$E(X)=np,D(X)=np(1-p).$$

③当 X 服从参数为 λ 的泊松分布时,

$$E(X)=\lambda,D(X)=\lambda.$$

④当 X 服从参数为 a,b 的均匀分布时,

$$E(X)=\frac{1}{2}(a+b),D(X)=\frac{1}{12}(b-a)^2.$$

⑤当 X 服从参数为 λ 的指数分布时,

$$E(X)=\frac{1}{\lambda},D(X)=\frac{1}{\lambda^2}.$$

⑥当 X 服从参数为 μ,σ^2 的正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 时,

$$E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2,\sqrt{D(X)}=\sigma.$$

定理1表明,当 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$ 时,标准化随机变量 X^* 服从 $N(0,1)$.

定理2 设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,那么 $Z=kX+lY+c$ 服从正态分布 $N(k\mu_1+l\mu_2+c,k^2\sigma_1^2+l^2\sigma_2^2)$.

定理2是定理1的推广形式,它表明独立正态随机变量的线性函数依然服从正态分布.

【例1.7-11】 设 X 是随机变量,已知 $P(X\leqslant1)=p,P(X\leqslant2)=q$,则 $P(X\leqslant1,X\leqslant2)$ 等于(　　).

(A) $p+q$　　(B) $p-q$　　(C) $q-p$　　(D) p

解:由于随机事件 $\{X\leqslant1\}\subset\{X\leqslant2\}$,因此

$$P(X\leqslant1,X\leqslant2)=P(X\leqslant1)=p.$$

故选(D).

用随机变量表达随机事件时,注意

$$\{X\leqslant1,X\leqslant2\}=\{X\leqslant1\}\cap\{X\leqslant2\}.$$

这是一种规定的表示方法.

【例1.7-12】 设随机变量 X 与 Y 相互独立,已知 $P(X\leqslant1)=p,P(Y\leqslant1)=q$,则 $P(\max(X,Y)\leqslant1)$ 等于(　　).

(A) $p+q$　　(B) pq　　(C) p　　(D) q

解:随机事件

$$\{\max(X,Y)\leqslant1\}=\{X\leqslant1,Y\leqslant1\},$$

因此,由乘法公式得到

$$P(\max(X,Y)\leqslant1)=P(X\leqslant1,Y\leqslant1)=P(X\leqslant1)P(Y\leqslant1)=pq.$$

故选(B).

本题中 $\{\max(X,Y)\leqslant1\}$ 可以分解成两个简单事件的积,类似地,

$$\{\max(X,Y)\geqslant1\}=\{X\geqslant1\}\cup\{Y\geqslant1\},$$

$\{\min(X,Y)\geqslant 1\}=\{X\geqslant 1,Y\geqslant 1\}$,

$\{\min(X,Y)\leqslant 1\}=\{X\leqslant 1\}\cup\{Y\leqslant 1\}$.

例如,由本题所给条件可以算得(按加法公式与乘法公式):

$$\begin{aligned}P(\min(X,Y)\leqslant 1)&=P(\{X\leqslant 1\}\cup\{Y\leqslant 1\})=P(X\leqslant 1)+P(Y\leqslant 1)-P(X\leqslant 1,Y\leqslant 1)\\&=p+q-P(X\leqslant 1)P(Y\leqslant 1)=p+q-pq.\end{aligned}$$

读者要习惯随机事件用随机变量的等式或不等式来表达的形式.

【例 1.7-13】 设离散型随机变量 X 的概率分布表为

X	-1	0	1	3
P_i	0.1	0.2	0.3	c

试求:(1)常数 c;

(2)概率 $P(X^2<\pi)$;

(3)分布函数值 $F(1)$;

(4)分布函数 $F(x)$.

解:(1)由于概率分布表中诸 p_k 必须满足 $\sum\limits_k p_k=1$,因此,由

$0.1+0.2+0.3+c=1$,

推得 $c=0.4$.

(2)X 的取值范围是$\{-1,0,1,3\}$. 这些值中满足不等式"$x_k^2<\pi$"的是 $-1,0,1$. 因此

$P(X^2<\pi)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0.1+0.2+0.3=0.6$.

(3)按分布函数的定义,

$F(1)=P(X\leqslant 1)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0.6$.

(4)按分布函数的定义作如下逐段讨论:

当 $x<-1$ 时,

$F(x)=P(X\leqslant x)=P(\Phi)=0$;

当 $-1\leqslant x<0$ 时,

$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=-1)=0.1$;

当 $0\leqslant x<1$ 时,

$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=-1)+P(X=0)=0.1+0.2=0.3$;

当 $1\leqslant x<3$ 时,

$F(x)=P(X\leqslant x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0.1+0.2+0.3=0.6$;

当 $x\geqslant 3$ 时,

$F(x)=P(X\leqslant x)=P(\Omega)=1$.

把上述结果综合起来,得到分段函数形式表达的分布函数:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.1, & -1\leqslant x<0,\\ 0.3, & 0\leqslant x<1,\\ 0.6, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

【例 1.7-14】 设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\leqslant x<0,\\ 0.8, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

试求:(1)X 的概率分布表;

(2)关于 t 的一元二次方程 $Xt^2-2t+1=0$ 有两个不同实根的概率.

解:(1)$F(x)$仅在 $x=-1,0,1$ 处间断,且是跳跃间断点,跳跃度分别是 0.2,0.6,0.2. 因此,X 的概率分布表为

X	-1	0	1
P_i	0.2	0.6	0.2

(2)一元二次方程的判别式 $\Delta=4-4X$. 注意到二次项系数不能为0,因此所求概率为

$$P(\Delta>0,X\neq0)=P(4-4X>0,X\neq0)=P(X<1,X\neq0)=P(X=-1)=0.2.$$

这里出现的概率也可以用分布函数计算:

$$P(X=-1)=F(-1)-\lim_{x\to-1^-}F(x)=0.2-0=0.2.$$

【例 1.7-15】 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}cx^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:(1)常数 c;

(2)概率 $P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)$;

(3)分布函数值 $F\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(4)分布函数 $F(x)$.

解:(1)由于概率密度函数 $p(x)$ 必须满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=1$. 因此,由

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x)\,dx=\int_{-1}^{1}cx^2\,dx=2c\int_0^1x^2\,dx=\frac{2c}{3},$$

推得 $c=\frac{3}{2}$.

(2)由高等数学中分段函数的积分得到

$$P\left(X\geqslant\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}p(x)\,dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{3}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{2}x^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}.$$

(3)按分布函数的定义

$$F\left(-\frac{1}{2}\right)=P\left(X\leqslant-\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}}p(x)\,dx=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{3}{2}x^2\,dx=\left[\frac{1}{2}x^3\right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{7}{16}.$$

(4)按分布函数的定义作如下逐段讨论:

当 $x<-1$ 时,

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\,dt=\int_{-\infty}^{x}0\,dx=0;$$

当$-1\leqslant x<1$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{x}\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2}t^3\right]_{-1}^{x}=\frac{1}{2}(x^3+1);$$

当$x\geqslant1$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}p(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}t^2\mathrm{d}t=1.$$

把上述结果综合起来，得到分段函数形式表达的分布函数：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \dfrac{1}{2}(x^3+1), & -1\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant1.\end{cases}$$

【例 1.7-16】 设连续型随机变量 X 的分布函数

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x^2, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant1.\end{cases}$$

试求：(1) X 的概率密度函数；

(2) 条件概率 $P(X>\frac{1}{4}|X<\frac{1}{2})$.

解：(1) 按高等数学中分段函数的求导规则，当$x<0$或$x>1$时，$p(x)=F'(x)=0$；当$0<x<1$时，$p(x)=F'(x)=2x$. 于是，X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

这里要注意，与高等数学中分段函数分段点（本例中$x=0$与$x=1$）求导规则不同，在概率中不需要用导数的定义去求，而是自动纳入“其他”类中. 这不会影响今后对概率密度函数$p(x)$作积分.

(2) 由条件概率计算公式得到

$$P\left(X>\frac{1}{4}\middle|X<\frac{1}{2}\right)=\frac{P\left(X>\frac{1}{4},X<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)}=\frac{P\left(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\right)}{P\left(X<\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}p(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}}p(x)\mathrm{d}x}=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x}{\int_{0}^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}.$$

这里出现的概率也可以用分布函数计算：

$$P\left(\frac{1}{4}<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{4}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16},$$

$$P\left(X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

【例 1.7-17】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(1,4)$. 已知 $\Phi(1)=a$，则 $P(-1<X\leqslant3)$ 等于(　　).

(A)$a-1$　　(B)$2a+1$　　(C)$a+1$　　(D)$2a-1$

解:按正态分布的概率计算公式($\mu=1,\sigma=2$),则

$$P(-1<X\leqslant 3)=\Phi\left(\frac{3-1}{2}\right)-\Phi\left(\frac{-1-1}{2}\right)=\Phi(1)-\Phi(-1)=\Phi(1)-[1-\Phi(1)]$$
$$=2\Phi(1)-1=2a-1.$$

故选(D).

【例 1.7-18】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,1)$. 已知 $P(X\leqslant\mu-3)=c$,则 $P(\mu<X<\mu+3)$等于(　　).

(A)$2c-1$　　(B)$1-c$　　(C)$0.5-c$　　(D)$0.5+c$

解:由于

$$P(X\leqslant\mu-3)=\Phi((\mu-3)-\mu)=\Phi(-3)=c,$$

因此,

$$P(\mu<X<\mu+3)=\Phi((\mu+3)-\mu)-\Phi(\mu-\mu)=\Phi(3)-\Phi(0)$$
$$=[1-\Phi(-3)]-0.5=(1-c)-0.5=0.5-c.$$

故选(C).

【例 1.7-19】 设随机变量 X 服从正态分布 $N(-1,9)$,则随机变量 $Y=2-X$ 服从(　　).

(A)正态分布 $N(3,9)$　　(B)均匀分布

(C)正态分布 $N(1,9)$　　(D)指数分布

解:按定理 1,Y 是 X 的线性函数,Y 依然服从正态分布. 由 $k=-1$、$c=2$ 算得 Y 服从正态分布

$$N(2-(-1),(-1)^2\times 9)=N(3,9).$$

故选(A).

【例 1.7-20】 把一颗均匀骰子掷了 6 次,假定各次出现的点数相互不影响. 随机变量 X 表示出现 6 点的次数,则 X 服从(　　).

(A)参数 $n=6,p=\frac{1}{2}$的二项分布　　(B)参数 $n=1,p=\frac{1}{6}$的二项分布

(C)参数 $n=6,p=\frac{1}{6}$的二项分布　　(D)非二项分布

解:每掷一次骰子可以看成做一次伯努利试验,把"出现 6 点"看做"成功",把"不出现 6 点"看做"失败". 独立地掷 6 次骰子相当于重复独立地做 6 次伯努利试验,且一次伯努利试验后出现成功的概率 $p=\frac{1}{6}$,故选(C).

如果把"出现 6 点"看做"失败",把"不出现 6 点"看做"成功",那么 $p=\frac{5}{6}$. 因此,也可以认为随机变量 X 服从参数 $n=6,p=\frac{5}{6}$的二项分布.

【例 1.7-21】 设离散型随机变量 X 的概率分布表为

X	-2	1	2	5
P_r	0.5	0.1	0.3	0.1

试求:(1)X 的数学期望、方差与标准差;

(2)$E\left(\frac{1}{X}\right)$;

(3)$E(3X^2-2)$.

解:(1)按数学期望的定义,则

$$E(X)=\sum_k x_kp_k=(-2)\times0.5+1\times0.1+2\times0.3+5\times0.1=0.2.$$

按随机变量函数的数学期望的定义,则

$$E(X^2)=\sum_k x_k^2p_k=(-2)^2\times0.5+1^2\times0.1+2^2\times0.3+5^2\times0.1=5.8.$$

于是,由方差的计算公式得到

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=5.8-0.2^2=5.76.$$

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{5.76}=2.4.$$

(2)按随机变量函数的数学期望的定义,则

$$E\left(\frac{1}{X}\right)=\sum_k\frac{1}{x_k}p_k=\frac{1}{-2}\times0.5+\frac{1}{1}\times0.1+\frac{1}{2}\times0.3+\frac{1}{5}\times0.1=0.02.$$

(3)由(1)中得到的 $E(X^2)=5.8$ 及数学期望的性质得到

$$E(3X^2-2)=3E(X^2)-2=3\times5.8-2=15.4.$$

【例 1.7-22】 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

试求:(1)X 的数学期望、方差与标准差;

(2)$E(\sqrt{X})$;

(3)$E(5\sqrt{X}-3X+2)$.

解: (1)按数学期望的定义,则

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\mathrm{d}x=\int_0^2x\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^2=\frac{4}{3}.$$

按随机变量函数的数学期望的定义,则

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x)\mathrm{d}x=\int_0^2x^2\cdot\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{8}x^4\right]_0^2=2.$$

于是,由方差的计算公式得到

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{2}{9},$$

$$\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{2}{9}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

(2)按随机变量函数的数学期望的定义,则

$$E(\sqrt{X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{x}p(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 \sqrt{x} \cdot \frac{x}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^2 = \frac{4}{5}\sqrt{2}.$$

(3)由(1)与(2)中得到的结果及数学期望的性质得到

$$E(5\sqrt{X} - 3X + 2) = 5E(\sqrt{X}) - 3E(X) + 2 = 5 \times \frac{4}{5}\sqrt{2} - 3 \times \frac{4}{3} + 2 = 4\sqrt{2} - 2.$$

【例 1.7-23】 某人独立地射击 10 次,每次射击命中目标的概率为 0.8,随机变量 X 表示 10 次射击中命中目标的次数,则 $E(X^2)$ 等于(   ).

(A)64 (B)65.6 (C)66.6 (D)80

解:把每次射击看成是做一次伯努利试验,"成功"表示"命中目标","失败"表示"没有命中目标",出现成功的概率 $p = 0.8$. 于是,X 服从参数 $n = 10, p = 0.8$ 的二项分布. 已知二项分布的数学期望与方差分别是

$$E(X) = np = 10 \times 0.8 = 8,$$

$$D(X) = np(1-p) = 10 \times 0.8 \times 0.2 = 1.6.$$

于是,由方差的计算公式推得

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2 = 1.6 + 8^2 = 65.6.$$

故选(B).

本题借助于常用分布的数字特征来求 $E(X^2)$ 是比较方便的,因为常用分布的数学期望与方差可以作为已知值使用. 如果用随机变量函数的数学期望的定义,即

$$E(X^2) = \sum_k x_k^2 p_k = \sum_{k=0}^{10} k^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^k \times 0.8^k \times 0.2^{10-k},$$

则加法不易计算.

【例 1.7-24】 设随机变量 X 服从区间 $(-1,5)$ 上的均匀分布,$Y = 3X - 5$,则 $E(Y)$ 与 $D(Y)$ 分别等于(   ).

(A)1,9 (B)3,27 (C)4,27 (D)1,27

解:已知区间 $(-1,5)$ 上的均匀分布的数学期望与方差分别是

$$E(X) = \frac{1}{2}[(-1) + 5] = 2,$$

$$D(X) = \frac{1}{12}[5 - (-1)]^2 = 3.$$

于是,由数学期望与方差的性质得到

$$E(Y) = E(3X - 5) = 3E(X) - 5 = 3 \times 2 - 5 = 1,$$

$$D(Y) = D(3X - 5) = 3^2 D(X) = 3^2 \times 3 = 27.$$

故选(D).

【例 1.7-25】 设随机变量 X 与 Y 相互独立,它们分别服从参数 $\lambda = 2$ 的泊松分布与指数分布. 记 $Z = X - 2Y$,则随机变量 Z 的数学期望与方差分别等于(   ).

(A)1,3 (B) -2,4 (C)1,4 (D) -2,6

解:已知参数 $\lambda = 2$ 的泊松分布的数学期望与方差分别为

$$E(X) = 2, D(X) = 2;$$

参数 $\lambda = 2$ 的指数分布的数学期望与方差分别为

$E(Y)=\frac{1}{2},D(Y)=\frac{1}{4}.$

由数学期望与方差的性质得到

$$E(Z)=E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=2-2\times\frac{1}{2}=1,$$

$$D(Z)=D(X-2Y)=D(X)+(-2)^2D(Y)=2+4\times\frac{1}{4}=3.$$

故选(A).

[例1.7-26] 已知某个连续型随机变量 X 的数学期望 $E(X)=1$,则 X 的概率密度函数不可能是(　　).

(A)$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他\end{cases}$

(B)$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$

(C)$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2},-\infty<x<+\infty$

(D)$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x-1|},-\infty<x<+\infty$

解:(A)、(C)、(D)的概率密度函数 $p(x)$ 都关于直线 $x=1$ 对称,而(B)的概率密度函数 $p(x)$ 是偶函数,即关于直线 $x=0$ 对称.因此,如果数学期望存在,那么(B)情形下 $E(X)=0$,故选(B).

本题如果分别直接计算数学期望,那么耗时又费力.用对称性来判断则方便得多.

1.7.4 矩、协方差与相关系数

除了随机变量的数学期望、方差与标准差之外,有用的数字特征还有矩、协方差与相关系数.但是,它们有些涉及两个随机变量.

1.矩

随机变量幂函数的数学期望统称为矩.

给定随机变量 X,称 $E(X^k)$ 为 X 的 k 阶原点矩,称 $E(X-EX)^k$ 为 X 的 k 阶中心矩,其中 k 为正整数.

数学期望 $E(X)$ 是 X 的一阶原点矩,方差 $D(X)$ 是 X 的二阶中心矩.

矩在数理统计的点估计中有重要应用.

2.两个随机变量函数的数学期望

给定两个随机变量 X 与 Y,随机变量 $Z=f(X,Y)$.

当离散型随机变量 X 与 Y 的联合概率分布为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}(i,j=1,2,\cdots)$ 时,

$$E(Z)=Ef(X,Y)=\sum_i\sum_j f(x_i,y_j)p_{ij}$$

当连续型随机变量 X 与 Y 的联合概率密度函数为 $p(x,y)$ 时,

$$E(Z)=Ef(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 协方差

给定两个随机变量 X 与 Y. 规定 X 与 Y 的协方差

$$Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

协方差的常用计算公式为

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

协方差有下列性质:

①$Cov(X,X)=D(X),Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$;

②$Cov(X,c)=0$;

③$Cov(kX,lY)=klCov(X,Y)$;

④$Cov(X_1\pm X_2,Y)=Cov(X_1,Y)\pm Cov(X_2,Y)$;

⑤当 X 与 Y 相互独立时,$Cov(X,Y)=0$.

4. 相关系数

给定两个随机变量 X 与 Y. 规定 X 与 Y 的相关系数

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$$

当 $\rho(X,Y)=0$ 时,称 X 与 Y 不相关.

相关系数有下列性质:

①$|\rho(X,Y)|\leqslant 1$;

②当 X 与 Y 相互独立时,X 与 Y 必定不相关. 但反之一般不成立;

③$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\rho(X,Y)\sqrt{D(X)D(Y)}$

$=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$.

【例 1.7-27】 设离散型随机变量 X 与 Y 的联合概率分布表为

X \ Y	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

试求:(1)$E(XY)$;

(2)$Cov(X,Y)$与 $\rho(X,Y)$.

解:(1)$E(XY)=0\times0\times0+0\times1\times\frac{1}{3}+1\times0\times\frac{1}{3}+1\times1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

(2)由 $E(X)=0\times\left(0+\frac{1}{3}\right)+1\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}=E(Y)$ 及(1)中算得的结果推出

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{9},$$

由 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\left[0^2\times\left(0+\frac{1}{3}\right)+1^2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)\right]-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9}=D(Y)$ 得到

$$\rho(X,Y)=\frac{-\frac{1}{9}}{\sqrt{\frac{2}{9}\times\frac{2}{9}}}=-\frac{1}{2}.$$

【例1.7-28】 设连续型随机变量 X 与 Y 的联合概率密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},0<x<2\text{ 且 }0<y<1,\\0,\text{其余.}\end{cases}$$

试求:(1)$E(XY)$;

(2)$Cov(X,Y)$与$\rho(X,Y)$.

解:(1)$E(XY)=\int_0^2\int_0^1 xy\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^2 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\times2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

(2)由于 $E(X)=\int_0^2\int_0^1 x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^2 x\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\mathrm{d}y=1$,

$$E(Y)=\int_0^2\int_0^1 y\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^2\mathrm{d}x\cdot\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

因此 $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{2}-1\times\frac{1}{2}=0.$

从而$\rho(X,Y)=0$. 这表明 X 与 Y 不相关.

【例1.7-29】 已知 $D(X)=2,D(Y)=3$,则 $Cov(X+Y,X-Y)$等于(　　).

(A)1　　(B)-1　　(C)5　　(D)6

解:由协方差的性质④得到

$$\begin{aligned}&Cov(X+Y,X-Y)\\&=Cov(X,X)-Cov(X,Y)+Cov(Y,X)-Cov(Y,Y)\\&=D(X)-D(Y)=2-3=-1.\end{aligned}$$

故选(B).

【例1.7-30】 已知 $D(X)=4,D(Y)=9,Cov(X+Y)=2$,则 $D(3X-2Y)$等于(　　).

(A)96　　(B)72　　(C)48　　(D)36

解:由相关系数的性质③推得

$$\begin{aligned}&D(3X-2Y)=D(3X)+D(2Y)-2Cov(3X,2Y)\\&=9D(X)+4D(Y)-2\times3\times2Cov(X,Y)\\&=9\times4+4\times9-12\times2=48.\end{aligned}$$

故选(C).

1.7.5 数理统计的基本概念

数理统计是随机数学的一个分支.它以概率为基础,给出处理随机性产生的数据的原理与方法.数理统计的内容很多,读者对此仅需初步了解.

1.总体与样本

总体是全体研究对象的某个特征值;样本是总体中部分个体的该特征值.

数理统计的基本内容是:如何根据样本所提供的信息对总体中的未知量作统计推断。

样本具有双重意义.随机抽样前,样本 $X_1,\cdots,X_n$ 是 n 个随机变量;随机抽样后,样本表现为n个数据 $x_1,\cdots,x_n$,这 n 个数据也称为样本值.在不致引起误解时,样本值也简称为样本.

总体用随机变量 X 表示,因为总体反映的特征值带有随机性,当总体 X 服从正态分布时,称X为正态总体.

今后常用"$X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本"这类语言. 这句话的含义是：$X_1,\cdots,X_n$ 是相互独立的随机变量，且每一个 X_i 都与总体 X 的分布相同，$i=1,\cdots,n$. 当总体 X 是离散型随机变量时，每一个 X_i 与 X 的概率分布相同；当总体 X 是连续型随机变量时，每一个 X_i 与 X 的概率密度函数相同.

对于每一个 $i=1,\cdots,n$，X_i 与 X 同分布蕴含了它们的数学期望、方差与标准差都相等，即

$$E(X_i)=E(X),D(X_i)=D(X).$$

2. 统计量

样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数统称为统计量. 统计量不能带有总体 X 中任何未知量.

以下给出数理统计中常用的统计量：

①样本均值 $\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$；

②样本方差 $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，样本标准差 $S=\sqrt{S^2}$；

③样本 k 阶原点矩 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k$，样本 k 阶中心矩 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$.

样本均值是样本一阶原点矩，但样本方差不是样本二阶中心矩.

定理 3 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本. 已知 $E(X)=\mu,D(X)=\sigma^2$，那么：

①$E(\bar{X})=\mu,D(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$；

②$E(S^2)=\sigma^2$.

这里要注意，$E(\bar{X}^2)\neq\mu^2,E(S)\neq\sigma$.

3. 三个常用分布

χ^2 分布、t 分布与 F 分布是数理统计中经常使用的连续型随机变量的分布，读者不必关心它们的概率密度函数，但要知道它们的参数，这些参数都称为自由度.

设 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立，且每一个 X_i 都服从标准正态分布 $N(0,1)$，则 $\chi^2=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记作 $\chi^2(n)$.

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1,)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $t(n)$.

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从自由度为 (n_1,n_2) 的 F 分布，记作 $F(n_1,n_2)$.

今后经常要用到 χ^2 分布、t 分布与 F 分布的临界值. 这些临界值都可以通过查表解决.

定理 4 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的容量为 n 的样本.

①$\bar{X}$ 服从 $N\left(\mu,\dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，或等价地 $\sqrt{n}\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma}$ 服从 $N(0,1)$.

②$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 $\chi^2(n-1)$.

③$\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu}{S}$服从 $t(n-1)$.

定理 5 设 $X_1,\cdots,X_{n_1}$ 是取自正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$ 的容量为 n_1 的样本，$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$ 是取自正态总体 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的容量为 n_2 的样本. 样本均值与样本方差分别记作 $\bar{X},S_1^2;\bar{Y},S_2^2$，那么，$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}$ 服从 $F(n_1-1,n_2-1)$.

定理 6 在定理 5 中，再假定 $\sigma_1^2=\sigma_2^2$，那么，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\text{服从 } t(n_1+n_2-2),$$

其中 $S_w=\sqrt{S_w^2}$，而

$$S_w^2=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\bar{X})^2+\sum_{i=1}^{n_2}(Y_i-\bar{Y})^2\right]$$
$$=\frac{1}{n_1+n_2-2}[(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2].$$

【例 1.7-31】 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本. 已知 X 服从区间 $(-\theta,\theta)$ 上的均匀分布. 试求 $E(\bar{X}),D(\bar{X}),E(S^2),E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)$.

解：已知区间 $(-\theta,\theta)$ 上的均匀分布的数学期望与方差分别是

$$E(X)=\frac{1}{2}[(-\theta)+\theta]=0,$$
$$D(X)=\frac{1}{12}[\theta-(-\theta)]^2=\frac{\theta^2}{3}.$$

按定理 3，则

$$E(\bar{X})=E(X)=0,$$
$$D(\bar{X})=\frac{1}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{3n},$$
$$E(S^2)=D(X)=\frac{\theta^2}{3},$$
$$E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2)=E((n-1)S^2)=(n-1)E(S^2)=\frac{(n-1)\theta^2}{3}.$$

【例 1.7-32】 设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 是取自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的样本，则 $(\sum_{i=1}^{16}X_i)/4S$ 服从 (　　).

(A) 正态分布　　(B) 自由度为 16 的 t 分布

(C) 标准正态分布　　(D) 自由度为 15 的 t 分布

解：由于 $n=16,\mu=0$，$\sum_{i=1}^{16}X_i=16\bar{X}$，因此，由定理 4 中③推得

$$\frac{\sum_{i=1}^{16}X_i}{4S}=\frac{16\bar{X}}{4S}=\sqrt{16}\frac{\bar{X}-0}{S}\text{服从 } t(15).$$

故选(D).

【例 1.7-33】 设 $X\sim N(0,1)$，则 X^2 服从(　　).

(A)$\chi^2(n)$　　(B)$\chi^2(1)$　　(C)$t(1)$　　(D)$N(0,1)$

解：在 χ^2 分布定义中取 $n=1$，得 $X^2\sim\chi^2(1)$. 故选(B).

1.7.6 参数估计——点估计

根据样本 $X_1,\cdots,X_n$ 对总体 X 中所含未知参数 θ 进行估计，这就是参数估计.

对于未知参数 θ，用某个实数来估计，这称为点估计. 未知参数 θ 的点估计记作 $\hat{\theta}$. 由于样本的意义具有双重性，因此，在随机抽样前，求点估计即是构造估计量 $\hat{\theta}=f(X_1,\cdots,X_n)$；在随机抽样后，把样本值(即数据)代入估计量公式便得 θ 的估计值.

1. 矩估计

矩估计的原理是用样本原点矩来估计相应(即同阶)的总体原点矩(假如是未知的).

当 $E(X)$，$D(X)$ 未知时，$E(X)$ 的矩估计是样本均值 $\bar{X}$，$D(X)$ 的矩估计是 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ (不是样本方差 S^2)，$\sqrt{D(X)}$ 的矩估计是 $\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ (不是样本标准差 S).

2. 最大似然估计

设总体 X 是连续型随机变量，它的概率密度函数记作 $p(x;\theta)$，其中 θ 是未知参数，这里用 $p(x;\theta)$ 取代概率中使用的 $p(x)$，这是为了强调存在未知参数 θ，因为 θ 是估计的对象. 如果总体 X 是离散型随机变量，今后仍用 $p(x;\theta)$ 表示概率分布，它的含义是

$$p(x;\theta)=P(X=x),x=x_1,x_2,\cdots$$

这样"总体 X 的分布为 $p(x;\theta)$"既包含了连续型随机变量，也包含了离散型随机变量. 例如，总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，那么 X 的概率分布可以表示成

$$p(x;\lambda)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!},x=0,1,2,\cdots$$

设总体 X 的分布为 $p(x;\theta)$，其中 θ 是未知参数. 称

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$$

为似然函数. 如果 $\hat{\theta}$ 满足

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta}L(\theta),$$

那么称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计. 由于 $L(\theta)$ 中含有 $x_1,\cdots,x_n$，因此 $\hat{\theta}$ 必定是样本 $x_1,\cdots,x_n$ 的函数. 随机抽样后，可以计算出未知参数的点估计值.

求最大似然估计可以按下列步骤进行：

①计算似然函数 $L(\theta)$；

②计算似然函数的对数 $\ln L(\theta)$；

③求导数 $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)$；

④解似然方程 $\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0$.

似然方程的解便是 θ 的最大似然估计. 只要似然方程的解是唯一的，不需要像高等数学中

那样去验证充分条件，因为它必定使似然函数达到最大. 另外，求导数中采用偏导数记号是为了强调除了未知参数 θ 是求导变量外，其余变量都视为常数.

3. 估计量的评选标准

当未知参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 满足 $E(\hat{\theta})=\theta$ 时，称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计.

当 $\hat{\theta}^*$ 与 $\hat{\theta}$ 都是未知参数 θ 的无偏估计，且 $D(\hat{\theta}^*)<D(\hat{\theta})$ 时，称 $\hat{\theta}^*$ 比 $\hat{\theta}$ 有效.

【例 1.7-34】 设总体 X 是连续型随机变量，X 的概率密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$，θ 是未知参数. $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本. 试求：

(1) θ 的矩估计；

(2) θ 的最大似然估计.

解：(1) 由于总体 X 的数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x;\theta)\mathrm{d}x=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}\mathrm{d}x=\theta\int_0^1 x^{\theta}\mathrm{d}x=\frac{\theta}{\theta+1},$$

因此，$\theta=\dfrac{E(X)}{1-E(X)}$. 按照矩估计的原理，$E(X)$ 用样本均值 $\bar{X}$ 估计，从而得到 θ 的矩估计 $\hat{\theta}=\dfrac{\bar{X}}{1-\bar{X}}$.

(2) 似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta x_i^{\theta-1})=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$. 于是，由

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=\frac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得 $\theta=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$，即 θ 的最大似然估计 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

【例 1.7-35】 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，其中 λ 未知. $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本，则 λ 的最大似然估计是（　　）.

(A) $\bar{X}$　　(B) S^2　　(C) S　　(D) $\bar{X}^2$

解：似然函数

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\right)=\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{x_1!\cdots x_n!}$$

于是，由

$$\ln L(\lambda)=-n\lambda+(\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln\lambda-\ln(\prod_{i=1}^{n}x_i!)$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\ln L(\lambda)=-n+\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}=0.$$

解得 λ 的最大似然估计 $\hat{\lambda}=\bar{X}$. 故选 (A).

【例1.7-36】 设 $X_1,\cdots,X_n$是取自正态总体 $N(\mu,1)$的样本，其中 μ 未知. μ 的无偏估计是(　　).

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$　　(B) S^2　　(C) $0.4X_1+0.6X_n$　　(D) $\bar{X}-X_1$

解：算得 $E(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i)=n\mu$(数学期望性质④)，$E(S^2)=1$(定理3②)，$E(\bar{X}-X_1)=E(\bar{X})-E(X_1)=\mu-\mu=0$(定理3①)，但

$$E(0.4X_1+0.6X_n)=0.4E(X_1)+0.6E(X_n)=0.4\mu+0.6\mu=\mu.$$

故选(C).

【例1.7-37】 设 $X_1,\cdots,X_n$是取自正态总体 $N(\mu,1)$的样本，其中 μ 未知. 下列 μ 的无偏估计中，最有效的是(　　).

(A) $\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2$　　(B) $\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2$　　(C) $\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2$　　(D) X_1

解：由方差的性质④算得

$$D\left(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{2}X_2\right)=\frac{1}{4}D(X_1)+\frac{1}{4}D(X_2)=\frac{1}{2},$$

$$D\left(\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2\right)=\frac{1}{9}D(X_1)+\frac{4}{9}D(X_2)=\frac{5}{9},$$

$$D\left(\frac{1}{4}X_1+\frac{3}{4}X_2\right)=\frac{1}{16}D(X_1)+\frac{9}{16}D(X_2)=\frac{5}{8},$$

而 $D(X_1)=1$. 故选(A).

1.7.7　参数估计——区间估计

对于未知参数，用某个区间来估计，这称为区间估计. 未知参数 θ 的区间估计记作$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$. 在随机抽样前，求区间估计即是构造区间的两个端点 $\underline{\theta}=f_1(X_1,\cdots,X_n)$，$\bar{\theta}=f_2(X_1,\cdots,X_n)$；在随机抽样后，把样本值(即数据)代入端点公式便得 θ 的估计区间.

1. 置信区间

置信区间是区间估计中最常用的形式.

设样本 $X_1,\cdots,X_n$ 取自总体 X，θ 是未知参数. 如果 $\underline{\theta}$、$\bar{\theta}$ 都是样本 $X_1,\cdots,X_n$ 的函数，且对于给定的 $1-\alpha(0<\alpha<1)$，$\underline{\theta}$、$\bar{\theta}$ 满足

$$P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\bar{\theta})=1-\alpha,$$

那么称随机区间$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$是置信度(或置信水平)为 $1-\alpha$ 的置信区间. 通常取 $1-\alpha$ 为 90%、95%、99%(即相应的 $\alpha=10\%$、5%、1%)等.

置信区间中的概率 $P(\underline{\theta}\leqslant\theta\leqslant\bar{\theta})$反映区间估计$[\underline{\theta},\bar{\theta}]$的可信程度，概率越大，可信程度越高，区间估计越佳. 另一方面，置信区间的长度 $\bar{\theta}-\underline{\theta}$ 反映区间估计的精度，长度越短，精度越高，区间估计越佳.

2. 单个正态总体中未知参数的置信区间

设总体 X 服从 $N(\mu,\sigma^2)$. $X_1,\cdots,X_n$是取自正态总体 X 的样本. 给定置信度 $1-\alpha$.

(1) 数学期望的置信区间

①当方差 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知时，数学期望 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left[\bar{x}-\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\right],$$

其中λ满足$P(|U|\leqslant\lambda)=1-\alpha$,$U$服从$N(0,1)$.

②当方差σ^2未知时,数学期望μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left[\bar{x}-\lambda\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+\lambda\frac{s}{\sqrt{n}}\right],$$

其中λ满足$P(|T|\leqslant\lambda)=1-\alpha$,$T$服从$t(n-1)$.

(2)方差与标准差的置信区间

设数学期望μ未知.方差σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left[\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2,\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right],$$

标准差σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left[\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2},\sqrt{\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right],$$

其中λ_1,λ_2满足$P(\chi^2<\lambda_1)=P(\chi^2>\lambda_2)=\frac{\alpha}{2}$,$\chi^2$服从$\chi^2(n-1)$.

3. 两个正态总体中均值差与方差比的置信区间

设总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$. $X_1,\cdots,X_{n_1}$是取自正态总体X的样本,$Y_1,\cdots,Y_{n_2}$是取自正态总体Y的样本.给定置信度$1-\alpha$.

(1)均值差$\mu_1—\mu_2$的置信区间

设$\sigma_1^2=\sigma_2^2$,但未知.$\mu_1—\mu_2$的置信区间的两个端点是

$$(\bar{x}-\bar{y})\pm\lambda s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},$$

其中λ满足$P(|T|\leqslant\lambda)=1-\alpha$,$T$服从$t(n_1+n_2-2)$.

(2)方差比σ_1^2/σ_2^2的置信区间

设μ_1,μ_2均未知.σ_1^2/σ_2^2的置信区间是

$$\left[\frac{1}{\lambda_2}\cdot\frac{s_1^2}{s_2^2},\frac{1}{\lambda_1}\cdot\frac{s_1^2}{s_2^2}\right],$$

其中λ_1、λ_2满足$P(F<\lambda_1)=P(F>\lambda_2)=\frac{\alpha}{2}$,$F$服从$F(n_1-1,n_2-1)$.

【例1.7-38】 对某一距离进行5次独立测量,得数据(单位:m)如下:

1 250,1 265,1 245,1 275,1 260.

已知测量值无系统误差,即可以认为测量值服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,其中μ,σ^2均未知.在置信度0.95下求μ与σ的置信区间.

解:由所给数据算得

$$\bar{x}=1\ 259,\ \sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=570,\ s=11.94.$$

对于数学期望μ的置信区间,由$n-1=4$,$\alpha=0.05$查t分布(自由度为4)临界值表,得到$\lambda=2.78$.于是,由

$$\bar{x} \pm \lambda \frac{s}{\sqrt{n}} = 1\,259 \pm 2.78 \times \frac{11.94}{\sqrt{5}} = 1\,259 \pm 14.8$$

得到 μ 的置信区间为[1 244.2,1 273.8].

对于标准差 σ 的置信区间,由 $n-1=4$,$\alpha=0.05$ 查 χ^2 分布(自由度为4)临界值表,得到 $\lambda_1=0.484$,$\lambda_2=11.1$. 于是,由

$$\left[\sqrt{\frac{1}{\lambda_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}, \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right] = \left[\sqrt{\frac{570}{11.1}}, \sqrt{\frac{570}{0.484}}\right]$$

得到 σ 的置信区间为[7.2,34.3].

1.7.8 假设检验

根据样本 $X_1,\cdots,X_n$ 对预先所作的假设进行鉴定,这就是假设检验.

总体 X 的分布是未知的. 有时候,即使总体分布的类型是已知的(例如,假定总体服从正态分布),但它们包含若干个未知参数. 预先对总体分布表示一种"看法",称为假设. 检验即是对所作的假设作出"鉴定". 检验的理论基础是"概率性质的反证法",即"小概率事件在一次观察中可以认为基本上不会发生".

检验结论是下列两种结果之一:拒绝假设,即认为预先所作的假设不成立;不能拒绝假设,也称为预先所作的假设是相容的.

作假设检验前先要给出检验标准(或检验水平)α,$0<\alpha<1$,常取 α 为1%、5%、10%等. 数值 α 保证检验结果犯第一类错误(即当预先给出的假设成立但检验结果是拒绝假设)的概率不超过 α.

显著性检验是假设检验的常用方法. 在显著性检验中,可称检验标准 α 为显著性水平,可称"拒绝假设"为"有显著性结果".

1. 显著性检验的一般步骤

①建立假设,记作 H_0.

②针对假设 H_0,构造检验统计量.

③在检验标准 α 下,对检验统计量建立不等式.

④把数据(即样本值)代入上述不等式,如果不等式成立,则认为假设 H_0 不成立(即拒绝 H_0);如果不等式不成立,则认为假设 H_0 是相容的(即不能拒绝 H_0).

2. 单个正态总体中参数的假设检验

设 X 是正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$,$X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的样本. 给定检验标准 α.

(1)数学期望的假设检验

建立假设 $H_0:\mu=\mu_0$,其中 μ_0 是一个已知数.

①当方差 $\sigma^2=\sigma_0^2$ 已知时,使用检验统计量

$$U=\sqrt{n}\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_0}.$$

当 H_0 成立(即 $\mu=\mu_0$)时,检验统计量 U 服从 $N(0,1)$. 当数据满足 $|u|=\sqrt{n}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\sigma_0}>\lambda$ 时拒绝 H_0,其中 λ 满足 $P(|U|>\lambda)=\alpha$,U 服从 $N(0,1)$.

②当方差 σ^2 未知时,使用检验统计量

$$T=\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{S}.$$

当H_0成立(即$\mu=\mu_0$)时,检验统计量T服从$t(n-1)$,当数据满足$|t|=\sqrt{n}\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{s}>\lambda$时拒绝$H_0$,其中$\lambda$满足$P(|T|>\lambda)=\alpha$,$T$服从$t(n-1)$.

(2)方差与标准差的假设检验

假定数学期望μ未知.

①方差的假设检验.建立假设$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$,其中σ_0^2是一个已知数.使用检验统计量

$$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

当H_0成立(即$\sigma^2=\sigma_0^2$)时,检验统计量χ^2服从$\chi^2(n-1)$.当数据满足$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2<\lambda_1$或$\chi^2>\lambda_2$时拒绝$H_0$,其中$\lambda_1,\lambda_2$满足$P(\chi^2<\lambda_1)=P(\chi^2>\lambda_2)=\frac{\alpha}{2}$,$\chi^2$服从$\chi^2(n-1)$.

②标准差的假设检验.建立假设$H_0:\sigma=\sigma_0$,其中σ_0是一个已知数.这个问题等价于检验$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$,因而检验方法与结论完全相同于方差的假设检验.

【例 1.7-39】 设$X_1,\cdots,X_{81}$是取自正态总体$N(\mu,9)$的样本,要检验$H_0:\mu=0$,则当H_0成立时,检验统计量(　　).

(A)$3|\overline{X}|$服从$t(80)$　　(B)$3|\overline{X}|$服从$N(0,1)$

(C)$9\overline{X}$服从$t(81)$　　(D)$3\overline{X}$服从$N(0,1)$

解:由于方差$\sigma^2=9$已知,因此,由$\sigma_0=3,n=81,\mu_0=0$推得,应使用检验统计量

$$U=\sqrt{n}\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}=\sqrt{81}\frac{\overline{X}-0}{3}=3\overline{X}.$$

当H_0成立时,U服从$N(0,1)$.故选(D).

【例 1.7-40】 对飞机的飞行速度进行15次独立试验,测得飞机的最大飞行速度(单位:m/s)如下:

422.2　418.7　425.6　420.3　425.8　423.1　431.5　428.2

438.3　434.0　412.3　417.2　413.5　441.3　423.7

根据长期的经验,可以认为最大飞行速度遵从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$,其中μ,σ^2均未知.

(1)在检验标准$\alpha=0.01$下检验$H_0:\mu=422$;

(2)在检验标准$\alpha=0.05$下检验$H_0:\sigma=5.6$.

解:由所给数据算得$n=15,n-1=14$,且

$$\bar{x}=425.05,\ \sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2=1\,006.34,\ s=8.48.$$

(1)对于$\alpha=0.01$,查t分布表(自由度为14)得临界值$\lambda=2.98$.检验统计量的值

$$t=\sqrt{n}\frac{\bar{x}-\mu_0}{s}=\sqrt{15}\frac{425.05-422}{8.48}=1.4.$$

由于$|t|<\lambda$,因此不能拒绝H_0,即假设H_0是相容的.

(2)对于$\alpha=0.05$,查χ^2分布表(自由度为14)得临界值$\lambda_1=4.1,\lambda_2=31.3$,检验统计量

的值

$$\chi^2=\frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{15}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1\,006.34}{5.6^2}=32.1.$$

由于$\chi^2>\lambda_2$,因此拒绝H_0,即不能认为最大飞行速度的标准差为5.6.

仿真习题

1.1 空间解析几何

1-1 设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$均为向量,下列等式中正确的是(   ).

(A)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2$ (B)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$

(C)$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$ (D)$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2\boldsymbol{b}$

1-2 已知两点$A(1,0,\sqrt{2})$和$B(4,2\sqrt{2},-\sqrt{2})$,则与向量$\overrightarrow{AB}$同向的单位向量为(   ).

(A)$(3,2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$ (B)$(-3,-2\sqrt{2},2\sqrt{2})$

(C)$\left(\frac{3}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$ (D)$\left(-\frac{3}{5},\frac{2\sqrt{2}}{5},-\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

1-3 已知$|\boldsymbol{a}|=2$,$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$,$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2$,则$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$为(   ).

(A)2   (B)$2\sqrt{2}$ (C)4   (D)$\sqrt{2}$

1-4 设向量$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$,则$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$为(   ).

(A)$\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ (B)$\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ (C)$\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$ (D)$\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$

1-5 已知两点$M_1(2,2,\sqrt{2})$和$M_2(1,3,0)$,则向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的方向余弦为(   ).

(A)$-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B)$-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(C)$-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$ (D)$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}$

1-6 过两点$A(3,-1,2)$和$B(-1,0,3)$的直线方程是(   ).

(A)$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$ (B)$\frac{x-3}{4}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{-1}$

(C)$\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{-1}$ (D)$\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{-1}$

1-7 直线$L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-1}{1}$与平面$\Pi:2x+y-4z=6$的位置关系是(   ).

(A)L垂直于Π (B)L与Π相交,但不垂直

(C)L与Π平行,且L不在Π上   (D)L在Π上

1-8 设有直线$L_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{2}=z+2$和$L_2:x=\frac{y-2}{-4}=z-1$,则$L_1$和$L_2$的夹角$\varphi$是(   ).

(A)$\frac{\pi}{6}$ (B)$\frac{\pi}{4}$ (C)$\frac{\pi}{3}$ (D)$\frac{\pi}{2}$

1-9 过点$(4,-1,3)$且平行于直线$L:\frac{x-3}{2}=y=\frac{z-1}{5}$的直线方程为(   ).

(A)$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-3}{5}$ (B)$\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{5}$

(C)$\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+3}{5}$ (D)$\frac{x+4}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{5}$

1-10 过点(0,2,4)且与两平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 平行的直线方程是(   ).

(A)$\frac{x}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-4}{-3}$ (B)$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-4}{2}$

(C)$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{1}$ (D)$\frac{x}{-2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-4}{1}$

1-11 过点$(2,-3,1)$且平行于向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(-1,1,-2)$ 的平面方程是(   ).

(A)$-x+y+z-4=0$ (B)$x-y-z-4=0$

(C)$x+y+z=0$ (D)$x+y-z+2=0$

1-12 一平面通过点$(4,-3,1)$且在 x,y,z 轴上的截距相等,则此平面方程是(   ).

(A)$x+y+z+2=0$ (B)$x+y-z+2=0$

(C)$x-y+z+2=0$ (D)$x+y+z-2=0$

1-13 点 $M(1,2,1)$ 到平面 $\Pi: x+2y-2z+3=0$ 的距离是(   ).

(A)$\frac{2}{3}$ (B)1 (C)2 (D)3

1-14 母线平行于 x 轴且通过曲线 $C:\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16,\\ x^2+z^2-y^2=0\end{cases}$ 的柱面方程是(   ).

(A)$2y^2+z^2=16$ (B)$3y^2+z^2=16$ (C)$2y^2-z^2=16$ (D)$3y^2-z^2=16$

1-15 曲线 $C:\begin{cases}z^2=5x,\\ y=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转一周所生成的旋转曲面的方程是(   ).

(A)$x^2+y^2=5x$ (B)$y^2+z^2=5x$

(C)$x^2+z^2=5x$ (D)$z^2=5\sqrt{x^2+y^2}$

1.2 微分学

1-16 极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+3^n)^{\frac{1}{n}}$的值等于(   ).

(A)3 (B)e (C)1 (D)∞

1-17 极限$\lim\limits_{x\to0}(1+3\tan x)^{\cot x}$的值等于(   ).

(A)e (B)$e^{\frac{1}{3}}$ (C)e^3 (D)∞

1-18 若$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+ax+4}{x-1}=-3$,则 a 的值是(   ).

(A)-3 (B)3 (C)-5 (D)5

1-19 极限$\lim\limits_{x\to0}x\sin\frac{t}{x}$的值是(   ).

(A)0 (B)1 (C)t (D)不存在

1-20 当 $x\to0$ 时,$\alpha(x)=\sin 2x$ 和 $\beta(x)=x^3+3x$ 都是无穷小,则 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(   ).

(A)高阶无穷小 (B)低阶无穷小

(C)同阶且非等价的无穷小 (D)等价无穷小

1-21 设$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　).

(A)可去间断点　(B)跳跃间断点　(C)第二类间断点　(D)连续点

1-22 设$f(x)=(1+\sin x)^{\cot x}$,欲使$f(x)$在$x=0$处连续,则应补充定义$f(0)$的值为(　　).

(A)0　(B)$\dfrac{1}{e}$　(C)1　(D)e

1-23 设$f(x)=\begin{cases}e^{-x}+1, & x\leqslant 0,\\ ax+b, & x>0,\end{cases}$欲使$f(x)$在$x=0$处连续,则$b$的值是(　　).

(A)1　(B)0　(C)2　(D)a

1-24 方程$x^5-3x=1$在下列区间内至少有一个实根的区间是(　　).

(A)(0,1)　(B)(1,2)　(C)(2,3)　(D)$(3,+\infty)$

1-25 设$f(x)=\dfrac{x}{\tan x}$,则$x=\dfrac{\pi}{2}$是$f(x)$的(　　).

(A)可去间断点　(B)跳跃间断点　(C)第二类间断点　(D)连续点

1-26 函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处(　　).

(A)不连续,不可导　(B)连续,可导　(C)连续,不可导　(D)可导,不连续

1-27 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ ax+b, & x>1,\end{cases}$$

$f(x)$在$x=1$处连续且可导,则(　　).

(A)$a=1,b=0$　(B)$a=0,b=1$

(C)$a=2,b=-1$　(D)$a=-1,b=2$

1-28 若a,b是方程$f(x)=0$的两个相异的实根,$f(x)$在$[a,b]$上连续,且在(a,b)内可导,则方程$f'(x)=0$在(a,b)内(　　).

(A)只有一个根　(B)至少有一个根

(C)没有根　(D)以上结论都不对

1-29 下列命题中,正确的是(　　).

(A)若在区间(a,b)内有$f(x)>g(x)$,则$f'(x)>g'(x),x\in(a,b)$

(B)若在区间(a,b)内有$f'(x)>g'(x)$,则$f(x)>g(x),x\in(a,b)$

(C)若$f'(x)$在(a,b)内单调,则$f(x)$在(a,b)内也单调

(D)若在区间(a,b)内有$f'(x)>g'(x)$,且$f(a)=g(a)$,则$f(x)>g(x),x\in(a,b)$

1-30 曲线$y=xe^x$的拐点是(　　).

(A)$(-1,-e^{-1})$　(B)(0,0)　(C)$(-2,-2e^{-2})$　(D)$(2,2e^2)$

1-31 极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin t^4\,dt}{x^5}$的值是(　　).

(A)$\frac{1}{4}$　　(B)$\frac{1}{5}$　　(C)1　　(D)∞

1-32　已知函数$f(x)$在x_0的某邻域内有意义，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=1,$$

则$f(x)$在x_0处(　　).

(A)取得极大值$f(x_0)$　　(B)取得极小值$f(x_0)$

(C)未取得极值　　(D)是否极值无法判定

1-33　曲面$3x^2+y^2-z^2=27$在点(3,1,1)处的法线方程为(　　).

(A)$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$　　(B)$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{-1}$

(C)$\frac{x-3}{9}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$　　(D)$\frac{x-3}{-9}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1}$

1-34　曲线C:

$$x=\frac{t}{1+t},\quad y=\frac{1+t}{t},\quad z=t^2$$

在与参数$t=1$相应的点处的法平面方程是(　　).

(A)$2x-8y+16z-2=0$　　(B)$2x+8y+16z-2=0$

(C)$2x-8y+16z-1=0$　　(D)$2x+8y+16z-1=0$

1-35　已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则点P的坐标是(　　).

(A)(1,-1,2)　　(B)(1,1,2)　　(C)(-1,1,2)　　(D)(-1,-1,2)

1-36　函数$f(x,y)=xy(6-x-y)$的极值点是(　　).

(A)(0,0)　　(B)(6,0)　　(C)(0,6)　　(D)(2,2)

1-37　函数$z=xy^2+y(\ln y-1)$在$x=1,y=1$处的全微分dz等于(　　).

(A)$dx+dy$　　(B)$dx-dy$　　(C)$dx+2dy$　　(D)$dx-2dy$

1-38　设函数$f(x,y)$在点(0,0)的某邻域内有定义，且$f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=-1$，则有(　　).

(A)$dz|_{(0,0)}=3dx-dy$

(B)曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,f(0,0))$的一个法向量为$3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$

(C)曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$

(D)曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的一个切向量为$3\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}$

1-39　设$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$，则$f(x,y)$在点(1,0)处(　　).

(A)取得极大值　　(B)取得极小值

(C)未取得极值　　(D)是否取得极值无法判定

1-40　设$z=f(x^2+y^2)$，其中f具有二阶导数，则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$等于(　　).

(A)$2f'(x^2+y^2)$　　(B)$4x^2f''(x^2+y^2)$

(C) $2f'(x^2+y^2)+4x^2f''(x^2+y^2)$ (D) $2xf''(x^2+y^2)$

1.3 积分学

1-41 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 e^{-x^2}，则 $\int xf'(x)dx$ 等于（ ）.

(A) $-2x^2e^{-x^2}+C$ (B) $-2x^2e^{-x^2}$

(C) $-e^{-x^2}(2x^2+1)$ (D) $-e^{-x^2}(2x^2+1)+C$

1-42 已知 $f'(x)=\tan^2 x$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)$ 等于（ ）.

(A) $\tan x+x+1$ (B) $\tan x-x+1$ (C) $-\tan x-x+1$ (D) $-\tan x+x+1$

1-43 $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^{3/2}}$ 等于（ ）.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) $\sqrt{2}$

1-44 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $\int_0^2 x^2f(x)dx$ 等于（ ）.

(A) 1 (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{5}{2}$

1-45 已知 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$，则 $\int_0^1 xf''(2x)dx$ 等于（ ）.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 5

1-46 设 $f(x)$ 在 $[-a,a]\ (a>0)$ 上连续，则 $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ 等于（ ）.

(A) $\int_0^a [f(x)+f(-x)]dx$ (B) 0

(C) $2\int_0^a f(x)dx$ (D) $\int_0^a [f(x)-f(-x)]dx$

1-47 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin x dx$ 等于（ ）.

(A) $-\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $-\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

1-48 广义积分 $I=\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$ 等于（ ）.

(A) 0 (B) 1 (C) $\frac{3}{2}$ (D) 2

1-49 下列结论中，错误的是（ ）.

(A) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ 收敛 (B) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$ 发散

(C) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$ 收敛 (D) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}$ 发散

1-50 广义积分 $I=\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$ 等于（ ）.

(A) $+\infty$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{6}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

1-51 由曲线 $y=\frac{1}{x+1}$ 与直线 $y=1, x=2$ 所围成的平面图形的面积是(　　).

(A) $\ln 3$　　(B) $2+\ln 3$　　(C) $1-\ln 2$　　(D) $2-\ln 3$

1-52 第一象限内曲线 $y^2+6x=36$ 和坐标轴所围成的图形绕 x 轴旋转所生成的旋转体的体积为(　　).

(A) 36π　　(B) 54π　　(C) 72π　　(D) 108π

1-53 由曲线 $y=x^{\frac{3}{2}}$ 与直线 $x=1$ 及 x 轴所围图形绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是(　　).

(A) $\frac{3}{7}\pi$　　(B) $\frac{4}{7}\pi$　　(C) $\frac{\pi}{2}$　　(D) π

1-54 已知曲线 $y=f(x)$ 上各点处的切线斜率为 $y'=\sqrt{\sin x}$，则曲线从 $x=0$ 到 $x=\frac{\pi}{2}$ 的长度 s 可表达成(　　).

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin x}\,\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin^2 x)\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1-55 由曲线 $y=3-x^2$ 与直线 $y=2x$ 所围成的图形的面积是(　　).

(A) $\frac{11}{3}$　　(B) $\frac{22}{3}$　　(C) $\frac{32}{3}$　　(D) $\frac{86}{3}$

1-56 设 $D=\{(x,y)\mid |x|\leqslant 1, |y|\leqslant 1\}$，则二重积分 $I=\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的值是(　　).

(A) $\frac{2}{3}$　　(B) $\frac{4}{3}$　　(C) 2　　(D) $\frac{8}{3}$

1-57 设 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$，则二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值是(　　).

(A) 3π　　(B) 4π　　(C) 5π　　(D) $\frac{14}{3}\pi$

1-58 交换积分次序，二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{3y}^3 f(x,y)\mathrm{d}x$ 化为(　　).

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^3 f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{3}} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^3\mathrm{d}x\int_{\frac{x}{3}}^1 f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{3}} f(x,y)\mathrm{d}y$

1-59 将二次积分 $\int_0^2\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2x-x^2}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y$ 化为极坐标形式的二次积分是(　　).

(A) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$　　(B) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\mathrm{d}\rho$　　(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^3\mathrm{d}\rho$

1-60 设 Ω 为曲面 $x^2+y^2=2z$ 及平面 $z=2$ 所围成的空间闭区域，则三重积分

$$I=\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$$

的值是(　　).

(A)$\frac{4}{3}\pi$　　(B)$\frac{8}{3}\pi$　　(C)$\frac{16}{3}\pi$　　(D)$\frac{32}{3}\pi$

1-61　设 L 是以 $O(0,0)$,$A(1,0)$ 和 $B(0,1)$ 为顶点的三角形区域的边界,则曲线积分

$$I=\int_L(x+y)\mathrm{d}s$$

的值是(　　).

(A)1　　(B)$\sqrt{2}$　　(C)$1+\sqrt{2}$　　(D)$2+\sqrt{2}$

1-62　设 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从 $O(0,0)$ 到 $P(1,1)$ 的一段弧,则曲线积分

$$I=\int_L 2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y$$

的值是(　　).

(A)1　　(B)0　　(C)$\frac{1}{2}$　　(D)-1

1-63　设 C 为椭圆$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$,其周长记为 a,则曲线积分

$$I=\oint_C(3xy+4x^2+2y^2)\mathrm{d}s$$

的值是(　　).

(A)$4a$　　(B)$6a$　　(C)$8a$　　(D)$10a$

1-64　设 C 为抛物线 $y^2=x$ 上从点 $O(0,0)$ 到点 $P(1,1)$ 的一段弧,则曲线积分

$$I=\int_C y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y$$

的值是(　　).

(A)1　　(B)$\frac{1}{2}$　　(C)$\frac{1}{3}$　　(D)$\frac{1}{4}$

1-65　设 C 为圆周 $x^2+y^2=ax(a>0)$,则曲线积分 $I=\oint_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$ 的值是(　　).

(A)a^2　　(B)$2a^2$　　(C)$3a^2$　　(D)$4a^2$

1.4　无穷级数

1-66　下列级数中,条件收敛的级数是(　　).

(A)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$　　(B)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$

(C)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$　　(D)$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n+1)}$

1-67　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=4$,$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=10$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于(　　).

(A)16　　(B)14　　(C)6　　(D)18

1-68　幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$ 的收敛域为(　　).

(A)$[-1,3]$ (B)$(-1,3]$ (C)$(-1,3)$ (D)$[-1,3)$

1-69 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(1-x)^n$ 的收敛域为$[-1,3)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为( ).

(A)$[-2,2)$ (B)$[-1,2)$ (C)$(-1,2]$ (D)$(-2,2]$

1-70 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ $(-1<x<1)$ 的和是( ).

(A)$\frac{1}{(1-x)^2}$ (B)$\frac{1}{(1+x)^2}$ (C)$\frac{1}{(1+x^2)^2}$ (D)$\frac{1}{(1-x^2)^2}$

1-71 级数

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots$$

的和函数为( ).

(A)$1+x^2$ (B)$1-x^2$

(C)$s(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ (D)$s(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

1-72 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} \quad (-1<x<1)$$

的和函数为( ).

(A)$\ln(1+x)$ $(-1<x<1)$ (B)$-\ln(1+x)$ $(-1<x<1)$

(C)$\ln(1-x)$ $(-1<x<1)$ (D)$-\ln(1-x)$ $(-1<x<1)$

1-73 下列命题中，错误的是( ).

(A)部分和数列$\{s_n\}$有界是正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分条件

(B)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定收敛

(C)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必定发散

(D)若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

1-74 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=x$，则$f(x)$的傅里叶级数为( ).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

(C) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx$ (D) $2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$

1-75 设$f(x)$是以2π为周期的周期函数，在$[-\pi,\pi)$上的表达式为$f(x)=e^x$，则$f(x)$的傅里叶级数在$x=\pi$处收敛于( ).

(A)e^{π} (B)$e^{-\pi}$ (C)$\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})$ (D)$\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$

1.5 常微分方程

第 76-77 题　垂直于 x 轴的动直线与过原点的曲线 $y=y(x)(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$ 以及 x 轴围成一个以 $[0,x]$ 为底边的曲边梯形，其面积为 $y^3(x)$.

1-76　函数 $y(x)$ 所满足的微分方程是(　　).

(A) $3yy'=1$　(B) $3y^{-1}y'=1$　(C) $y'=3y+1$　(D) $y'=3y^{-1}+1$

1-77　函数 $y(x)$ 的隐函数形式是(　　).

(A) $y^2-x=0$　(B) $y^2+x=0$　(C) $3y^2-2x=0$　(D) $2y-3x^2=0$

1-78　方程 $xy'-y\ln y=0$ 满足 $y|_{x=1}=\mathrm{e}$ 的解是(　　).

(A) $y=\mathrm{e}^{2-x}$　(B) $y=\mathrm{e}^x$

(C) $y=\mathrm{e}^{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}$　(D) $y=\mathrm{e}^{\tan\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$

1-79　已知齐次方程 $xy''+y'=0$ 有一个特解为 $\ln x$，则该方程的通解为(　　).

(A) $y=C_1\ln x+C_2$　(B) $y=C_1\ln x+C_2x$

(C) $y=C(\ln x+1)$　(D) $y=C(\ln x+x)$

1-80　若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+2$，则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $2\mathrm{e}^x$　(B) e^x+1　(C) $\mathrm{e}^{2x}+1$　(D) $2\mathrm{e}^{2x}$

1-81　方程 $(x^2+y)\mathrm{d}x+(x-2y)\mathrm{d}y=0$ 的通解是(　　).

(A) $\frac{x^3}{3}-xy+y^2=0$　(B) $\frac{x^3}{3}-xy+y^2=C$

(C) $\frac{x^3}{3}+xy-y^2=0$　(D) $\frac{x^3}{3}+xy-y^2=C$

1-82　设方程 $y''-4y'+3y=0$ 的某一积分曲线，它在点 $(0,2)$ 处与直线 $x-y+2=0$ 相切，则该积分曲线的方程是(　　).

(A) $y=\frac{1}{4}(5\mathrm{e}^{-x}+3\mathrm{e}^{3x})$　(B) $y=\frac{1}{2}(5\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{3x})$

(C) $y=\frac{1}{4}(7\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-3x})$　(D) $y=\frac{1}{2}(7\mathrm{e}^{-x}-3\mathrm{e}^{-3x})$

1-83　函数 $y=\mathrm{e}^x\int_x^0\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+C\mathrm{e}^x$ 是以下(　　)方程的解.

(A) $y'-y=\mathrm{e}^{x+x^2}$　(B) $y'-y=-\mathrm{e}^{x+x^2}$

(C) $y'+y=\mathrm{e}^{x+x^2}$　(D) $y'+y=-\mathrm{e}^{x+x^2}$

1-84　设 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，又 $f(x_0)>0,f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0(　　).

(A)取得极大值　(B)取得极小值

(C)的某个邻域内单调增加　(D)的某个邻域内单调减少

1-85　方程 $xy'+y=x\mathrm{e}^x$ 满足 $y(1)=0$ 的特解是(　　).

(A) $\frac{1-x}{x}\mathrm{e}^x$　(B) $\frac{x-1}{x}\mathrm{e}^{-x}$　(C) $\frac{x-1}{x}\mathrm{e}^x$　(D) $\frac{1-x}{x}\mathrm{e}^{-x}$

1.6 线性代数

1-86　设 10 阶行列式(　　).

$$D_{10}=\begin{vmatrix} 0 & 0 & & 10 \\ 1 & 0 & & \\ & 2 & \ddots & \\ 0 & & 9 & 0 \end{vmatrix}$$

则D_{10}的值等于(　　)。

(A) $-10!$　　(B) $10!$　　(C) $-9!$　　(D) $9!$

1-87　设10阶行列式(　　).

$$D_{10}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 & 10 \\ -1 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

则D_{10}的值等于(　　)。

(A) 10　　(B) 55　　(C) 110　　(D) -55

1-88　设关于x的多项式

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & x & 3 & 1 \\ 2 & 2 & x & 4 \\ 3 & 3 & 4 & x \end{vmatrix},$$

则方程$f(x)=0$的解是(　　).

(A) -2或1　　(B) 1或4　　(C) -2或4　　(D) $-2,1$或4

1-89　设3阶方阵A、B的行列式$|A|=2$，$|B|=-3$，则$|-A^TB^2|$等于(　　).

(A) 18　　(B) -6　　(C) -18　　(D) -9

1-90　设$\alpha=[1,2,-1]^T$，$\beta=[0,1,0]^T$，记$A=E+\alpha\beta^T$，则A^3等于(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 7 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & -7 & 1 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 1 & 13 & 0 \\ 0 & 27 & 0 \\ 0 & -13 & 1 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

1-91　设矩阵$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$，则矩阵方程$XA=B$的解$X$等于(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 6 \\ 7 & 16 & 9 \end{bmatrix}$　　(B) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$　　(C) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{bmatrix}$　　(D) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 8 & 5 & 12 \\ 14 & 8 & 18 \end{bmatrix}$

1-92　设3阶方阵A的秩$R(A)=1$，则A的伴随矩阵A^*的秩$R(A^*)$等于(　　).

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

1-93　设向量组A：$\alpha_1=(1,0,5,2)$，$\alpha_2=(-2,1,-4,1)$，$\alpha_3=(-1,1,t,3)$，$\alpha_4=(-2,1,-4,1)$线性相关，则t必定等于(　　).

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 任意数

1-94 设向量组 $A:\alpha_1=(t,1,1),\alpha_2=(1,t,1),\alpha_3=(1,1,t)$ 的秩为2，则 t 等于(　　).

(A)1　　(B)-2　　(C)1 或 -2　　(D)任意数

1-95 已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+tx_3=4,\\ x_1-x_2+2x_3=-4,\\ -x_1+tx_2+x_3=t^2\end{cases}$$

有无限多个解，则 t 等于(　　).

(A)-1　　(B)1　　(C)4　　(D)-1 或 4

1-96 已知4元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩等于3，且 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是3个不同的解向量，则通解是(　　).

(A)$\boldsymbol{x}=k_1(\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2)+\boldsymbol{\eta}_3$　　(B)$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3$

(C)$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+k_3\boldsymbol{\eta}_3$　　(D)$\boldsymbol{x}=k_1(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+\boldsymbol{\eta}_3$

1-97 设3阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值2，且已知 $|\boldsymbol{A}|=5$，则 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 必有特征值(　　).

(A)25　　(B)12.5　　(C)5　　(D)2.5

1-98 设列向量 $\boldsymbol{p}=[1,-1,2]^{\mathrm{T}}$ 是3阶方阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&1&2\\2&b&a\\1&a&3\end{bmatrix}$$

相应特征值 λ 的特征向量，则特征值 λ 等于(　　).

(A)3　　(B)5　　(C)7　　(D)不能确定

1-99 设 $\boldsymbol{A}$ 是3阶方阵，$\boldsymbol{A}$ 能与对角阵相似的充分必要条件是(　　).

(A)存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$　　(B)$\boldsymbol{A}$ 是实对称阵

(C)$\boldsymbol{A}$ 有3个线性无关的特征向量　　(D)$\boldsymbol{A}$ 有3个不同的特征值

1-100 设 A 是 n 阶方阵(不一定是对称阵). 二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Ax}$ 相对应的对称阵是(　　).

(A)$\boldsymbol{A}$　　(B)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$　　(C)$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$　　(D)$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

1-101 已知 $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+2tx_1x_2$ 是正定二次型，则(　　).

(A)$|t|<1$　　(B)$|t|\leqslant 1$　　(C)$t>0$　　(D)$t<0$

1.7 概率与数理统计

1-102 设 A,B,C 是三个事件，则 $AB+BC+CA$ 表示(　　).

(A)三个事件中恰有两个事件发生　　(B)三个事件中至多有两个事件发生

(C)三个事件中至少有两个事件发生　　(D)三个事件全发生

1-103 设事件 A,B 满足 $P(A+B)=P(A)+P(B)$，则(　　).

(A)A 与 B 互不相容　　(B)A 与 B 相互独立

(C)A 与 B 相互对立　　(D)$P(A-B)=P(A)$

1-104 设事件 A 与 B 相互独立. 已知 $P(A)=0.3, P(A+B)=0.65$，则 $P(B)$ 等于(　　).

(A)0.3　　(B)0.35　　(C)0.5　　(D)0.95

1-105　两台机床加工同样的零件.第一台机床出现次品的概率是 0.04,第二台机床出现次品的概率是 0.02.现把加工后的零件放在一起,已知第一台机床的产品占 25%.从这批零件中任意取一个,则它是次品的概率等于(　　).

(A)0.04　　(B)0.02　　(C)0.03　　(D)0.025

1-106　盒子中装有 12 支铅笔,其中一半是国产的,另一半是进口的.现从盒子中随机地抽取 2 支笔,则它们都是国产笔的概率等于(　　).

(A)$\frac{15}{66}$　　(B)$\frac{18}{66}$　　(C)$\frac{18}{72}$　　(D)$\frac{15}{72}$

1-107　某位足球运动员罚球命中率为 0.9,假定各次罚球是否命中是相互独立的,则他五次罚球至少中 4 次的概率等于(　　).

(A)$0.9^4\times0.1$　　(B)$C_5^4 0.1^4\times0.9$　　(C)$C_5^4 0.9^4\times0.1$　　(D)$0.9^5+C_5^1 0.9^4\times0.1$

1-108　设 X 是随机变量.已知 $P(X\leqslant1)=0.3$,$P(X\geqslant2)=0.4$,则 $P(1<X<2)$ 等于(　　).

(A)0.2　　(B)0.3　　(C)0.4　　(D)0.7

1-109　设离散型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.3, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant3.\end{cases}$$

则 $P(|X|<2)$ 等于(　　).

(A)0.4　　(B)0.6　　(C)0.8　　(D)1

1-110　设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则关于 t 的一元二次方程 $9t^2+4Xt+1=0$ 无实根的概率等于(　　).

(A)$\frac{1}{8}$　　(B)$\frac{3}{8}$　　(C)$\frac{5}{8}$　　(D)$\frac{7}{8}$

1-111　设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,16)$,Y 服从正态分布 $N(\mu,25)$.记 $p=P(X\leqslant\mu-4)$,$q=P(Y\geqslant\mu+5)$,则 p 与 q 的大小关系是(　　).

(A)$p>q$　　(B)$p<q$　　(C)$p=q$　　(D)不能确定

1-112　设随机变量 X 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布,即 X 的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & \text{其余},\end{cases}$$

则条件概率 $P(X>5|X>3)$ 等于(　　).

(A)e^{-1}　　(B)e^{-2}　　(C)e^{-3}　　(D)e^{-5}

1-113　设离散型随机变量 X 的概率分布表为

X	-2	-1	0	2
P_i	0.4	0.3	0.2	0.1

则 $E(X^4)$ 等于(　　).

(A)7.2　(B)7.9　(C)8.3　(D)8.5

1-114　设随机变量 X 的数学期望与标准差都是 2. 记 $Y=3-X$,则 $E(Y^2)$ 等于(　　).

(A)3　(B)5　(C)7　(D)9

1-115　设随机变量 X 与 Y 相互独立. 已知 X 服从区间(1,5)上的均匀分布,Y 服从参数 $\lambda=5$ 的指数分布,则 $D(3X-5Y)$ 等于(　　).

(A)5　(B)9　(C)10　(D)13

1-116　已知 $D(X)=9, D(Y)=4, \rho(X,Y)=\frac{1}{2}$,则 $D(X-Y)$ 等于(　　).

(A)13　(B)5　(C)7　(D)10

1-117　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本. 已知总体 X 服从参数为 p 的二点分布,则 $E\left(\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right)$ 等于(　　).

(A)$np(1-p)$　(B)$(n-1)p(1-p)$　(c)np　(D)np^2

1-118　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本. 已知总体 X 服从参数为 λ 的指数分布,即 X 的概率密度函数为

$$p(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 λ 的最大似然估计是(　　).

(A)$\bar{X}$　(B)$\bar{X}^{-1}$　(C)$\bar{X}^{-2}$　(D)$\bar{X}^2$

1-119　设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的容量为 n 的样本,总体均值 $E(X)=\mu$ 未知,μ 的无偏估计是(　　).

(A)$\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n} iX_i$　(B)$\bar{X}-X_1$　(C)X_1+X_n　(D)$\bar{X}+X_1$

1-120　设 $X_1,\cdots,X_{16}$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本,其中 μ 与 σ^2 均未知. 要检验 $H_0:\sigma=3$,则当 H_0 成立时,检验统计量(　　).

(A)$\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 $\chi^2(15)$　(B)$\frac{1}{3}\sqrt{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2}$ 服从 $\chi^2(15)$

(C)$\frac{5S^2}{3}$ 服从 $\chi^2(15)$　(D)$\frac{1}{9}\sum_{i=1}^{16}(X_i-\bar{X})^2$ 服从 $\chi^2(16)$

习题答案

1-1　(A)　1-2　(C)

1-3　$\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\sqrt{2}}{2}, |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=2\Rightarrow$(A)

1-4　(C)　1-5　(A)　1-6　(B)

1-7　$1\cdot2+2\cdot1+1\cdot(-4)=0\Rightarrow L$ 与 Π 平行;$2\cdot2+3-4\cdot1=3\neq6\Rightarrow L$ 不在 Π 上$\Rightarrow$(C)

1-8　$\cos\varphi=\frac{|-2\cdot1+2\cdot(-4)+1\cdot1|}{3\cdot3\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \varphi=\frac{\pi}{4}\Rightarrow$(B)

1-9 (B)

1-10 $(1,0,2)\times(0,1,-3)=(-2,3,1)\Rightarrow$(D)

1-11 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(-1,1,1)$,排除(C)、(D),过点$(2,-3,1)\Rightarrow$(B)

1-12 由截距相等,排除(B)、(C),过点$(4,-3,1)\Rightarrow$(D)

1-13 (C) 1-14 (D) 1-15 (B) 1-16 (A) 1-17 (C) 1-18 (C)

1-19 (A) 1-20 (C)

1-21 $f(0^-)=-1,f(0^+)=1\Rightarrow$(B)

1-22 $f(0)=\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}}=\mathrm{e}\Rightarrow$(D)

1-23 $f(0)=f(0^-)=2,f(0^+)=b,b=2\Rightarrow$(C)

1-24 设$f(x)=x^5-3x-1,f(1)=-3<0,f(2)=25>0\Rightarrow$(B)

1-25 (A)

1-26 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0),f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0\Rightarrow$(B)

1-27 由连续$\Rightarrow a+b=1,a=1-b$

由可导$\Rightarrow f'_-(1)=2,f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{ax+b-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(1-b)(x-1)}{x-1}=1-b,1-b=2,b=-1,$ $a=2\Rightarrow$(C)

1-28 设$f'(x)>0,x\in(a,b)$,则$f(x)$在$[a,b]$上单调增加,从而$f(b)>f(a)=0$. 这与$f(b)=0$的假设矛盾. 故得(B).

1-29 设$F(x)=f(x)-g(x)$,则$F'(x)>0\Rightarrow F(x)>F(a)=0,x\in(a,b)\Rightarrow$(D)

1-30 (C) 1-31 (B)

1-32 $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\Rightarrow$(B)

1-33 (B)

1-34 $x'(t)=\dfrac{1}{(1+t)^2},y'(t)=-\dfrac{1}{t^2},z'(t)=2t,t=1$得向量$\left(\dfrac{1}{4},-1,2\right)$或$(1,-4,8)$,排除(B)、(D),过点$\left(\dfrac{1}{2},2,1\right)\Rightarrow$(C)

1-35 (B)

1-36 $f_{xx}=-2y,f_{xy}=6-2x-2y,f_{yy}=-2x$,由极值的充分条件检验得(D).

1-37 (C)

1-38 (A)不成立,因为可偏导未必可微分;(B)不成立,一个法向量应为$3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$,取$x$为参数,则曲线$x=x,y=0,z=f(x,0)$在点$(0,0,f(0,0))$处的切向量为$\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{k}$,故得(C).

1-39 (B) 1-40 (C)

1-41 $\int f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-x^2}+C,f(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2};\int xf'(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=-2x^2\mathrm{e}^{-x^2}-\mathrm{e}^{-x^2}+C\Rightarrow$(D)

1-42 (B) 1-43 (A) 1-44 (C)

1-45 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_0^1 x\mathrm{d}f'(2x)=\dfrac{1}{2}\left\{[xf'(2x)]_0^1-\int_0^1 f'(2x)\mathrm{d}x\right\}=$

$\frac{1}{2}\left[5-\frac{1}{2}(3-1)\right]=2\Rightarrow$ (B)

1-46 (A) 1-47 (B) 1-48 (D) 1-49 (D) 1-50 (B) 1-51 (D)

1-52 (D)

1-53 $V=\pi-\pi\int_0^1 x^2(y)\mathrm{d}y=\frac{4}{7}\pi\Rightarrow$ (B)

1-54 (B)

1-55 $\begin{cases}y=2x,\\ y=3-x^2\end{cases}\Rightarrow x=-3,1.\ A=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)\mathrm{d}x=\frac{32}{3}\Rightarrow$ (C)

1-56 (D) 1-57 (D) 1-58 (D) 1-59 (D) 1-60 (C) 1-61 (C)

1-62 (B)

1-63 因 C 关于 y 轴对称，$3xy$ 关于变量 x 是奇函数，所以$\oint_C 3xy\mathrm{d}s=0$，又因在 C 上，$4x^2+2y^2=8$，所以 $I=0+8\oint_C\mathrm{d}s=8a\Rightarrow$ (C)

1-64 (C)

1-65 $C:\begin{cases}x=\frac{a}{2}\cos\theta+\frac{a}{2},\\ y=\frac{a}{2}\sin\theta.\end{cases}\theta\in[0,2\pi].\ I=\int_0^{2\pi}a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\cdot\frac{a}{2}\mathrm{d}\theta=2a^2\Rightarrow$ (B)

1-66 (A)

1-67 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$，故$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n=10-4=6$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=6+10=16\Rightarrow$ (A)

1-68 易知级数收敛半径为2，从而收敛区间为$|x-1|<2$，即$(-1,3)$。当$x=-1,3$时，级数均发散，故收敛域为$(-1,3)\Rightarrow$(C)。

1-69 (D)

1-70 $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1)$；$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},x\in(-1,1)\Rightarrow$ (A)

1-71 (C)

1-72 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},x\in(-1,1),s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1).\ s(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x),x\in(-1,1)\Rightarrow$ (D)

1-73 (D) 1-74 (D) 1-75 (C) 1-76 (A) 1-77 (C) 1-78 (B)

1-79 (A)

1-80 $\begin{cases}f'(x)=2f(x)\\ f(0)=2\end{cases}\Rightarrow f(x)=2\mathrm{e}^{2x}\Rightarrow$(D)

1-81 方程为全微分方程，通解为 $u(x,y)=\int_0^x(x^2+y)\mathrm{d}x+\int_0^y(-2y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}x^3+xy-y^2=C\Rightarrow$ (D)

1-82 特征方程 $r^2-4r+3=0, r_1=1, r_2=3$. 通解 $y=C_1e^x+C_2e^{3x}$，由初始条件：$y|_{x=0}=2$，$y'|_{x=0}=1 \Rightarrow C_1=\frac{5}{2}, C_2=-\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2}(5e^x-e^{3x}) \Rightarrow$ (B)

1-83 $y' = e^x\int_x^0 e^{t^2}dt - e^x \cdot e^{x^2} + Ce^x = y - e^{x+x^2} \Rightarrow$ (B)

1-84 $f'(x_0)=0, f''(x_0)=2f'(x_0)-4f(x_0)=-4f(x_0)<0 \Rightarrow$ (A)

1-85 方程为一阶线性方程：$y'+\frac{1}{x}y=e^x$，通解为

$$y(x) = e^{-\int\frac{dx}{x}}\left(\int e^x e^{\int\frac{dx}{x}}dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(\int xe^x dx + C\right) = \frac{1}{x}[(x-1)e^x + C],$$

由 $y(1)=0 \Rightarrow C=0$，得特解 $y(x)=\frac{x-1}{x}e^x \Rightarrow$ (C)

1-86 (A)

1-87 (B). 作 $c_{10}+c_9, c_9+c_8, \cdots, c_2+c_1$ 得上三角行列式，其主对角线上元素之积为 $1+2+\cdots+10=55$

1-88 (D). 作 $-c_1+c_2, -2r_1+r_3, -3r_1+r_4$，得行列式的值为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & x+2 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x+2)(x-1)(x-4)$

1-89 (C)

1-90 (B). 由于 $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=2$，因此 $A^3=(E+\alpha\beta^T)^3=E^3+3\alpha\beta^TE^2+3(\alpha\beta^T)^2E+(\alpha\beta^T)^3=E+3\alpha\beta^T+6\alpha\beta^T+4\alpha\beta^T=E+13\alpha\beta^T$，其中 $\alpha\beta^T=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

1-91 (A)

1-92 (D). 由 $R(A)=1$ 推得 A 的 2 阶子式全等于 0，从而 A^* 中每个元素 $A_{ij}=0$，即 $A^*=0$

1-93 (D) 1-94 (B)

1-95 (C). 由 $|A|=0$ 得 $t=-1,4$. 当 $t=-1$ 时，$R(A)=2, R(\bar{A})=3$，方程组无解. 当 $t=4$ 时，$R(A)=R(\bar{A})=2$，方程组有无限多个解.

1-96 (A). 由 $n=4, r=3$ 得 $s=1$. $\eta_1-\eta_2$ 是 $Ax=0$ 的基础解系

1-97 (D). 由 $A^*=|A|A^{-1}=5A^{-1}$ 得到

1-98 (B). 由 $Ap=\lambda p$ 解得

1-99 (C) 1-100 (C) 1-101 (A) 1-102 (C)

1-103 (D). 由题设得到 $P(AB)=0$，于是 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$。要注意 $P(AB)=0$ 推不出 $AB=\phi$（即 A 与 B 互不相容）

1-104 (C) 1-105 (D)

1-106 (A). 应用超几何概率公式直接计算

1-107 (D)

1-108 (B). 由 $P(X<2)=1-P(X\geqslant 2)=0.6$ 得 $P(1<X<2)=P(X<2)-P(X\leqslant 1)=0.6-0.3=0.3$

1-109 (C). 由于 $x=2$ 是 $F(x)$ 的连续点，因此 $P(|X|<2)=F(2)-F(-2)=0.8$

1-110 (D) 1-111 (C)

1-112 (B). 由于 $P(X>5\mid X>3)=\dfrac{P(X>3,X>5)}{P(X>3)}=\dfrac{P(X>5)}{P(X>3)}=\dfrac{\int_5^{+\infty}e^{-x}dx}{\int_3^{+\infty}e^{-x}dx}=\dfrac{e^{-5}}{e^{-3}}$ $=e^{-2}$

1-113 (C)

1-114 (B). $E(Y^2)=E(3-X)^2=E(9+X^2-6X)=9+E(X^2)-6E(X)$，而 $E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=2^2+2^2=8$. 也可以如下运算：$E(Y)=3-E(X)=1, D(Y)=D(X)=2^2$. 于是，$E(Y^2)=D(Y)+(EY)^2=4+1=5$

1-115 (D). $D(X)=\dfrac{1}{12}(5-1)^2=\dfrac{4}{3}, D(Y)=\dfrac{1}{25}$

1-116 (C) 1-117 (B) 1-118 (B)

1-119 (A). 由数学期望的性质得到 $E\left(\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iX_i\right)=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iE(X_i)=\dfrac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}i\mu=\mu$，而 $E(\bar{X}-X_1)=0, E(X_1+X_n)=E(\bar{X}+X_1)=2\mu$

1-120 (C). 问题等价于检验 $H_0:\sigma^2=9$，注意 $n=16, n-1=15$

2 物理学

考试大纲

2.1 热学

气体状态参量；平衡态；理想气体状态方程；理想气体的压强和温度的统计解释；自由度；能量按自由度均分原理；理想气体内能；平均碰撞频率和平均自由程；麦克斯韦速率分布律；方均根速率；平均速率；最概然速率；功；热量；内能；热力学第一定律及其对理想气体等值过程的应用；绝热过程；气体的摩尔热容量；循环过程；卡诺循环；热机效率；净功；致冷系数；热力学第二定律及其统计意义；可逆过程和不可逆过程。

2.2 波动学

机械波的产生和传播；一维简谐波表达式；描述波的特征量；波阵面；波前；波线；波的能量、能流、能流密度；波的衍射；波的干涉；驻波；自由端反射与固定端反射；声波；声强级；多普勒效应。

2.3 光学

相干光的获得；杨氏双缝干涉；光程和光程差；薄膜干涉；光疏介质；光密介质；迈克耳孙干涉仪；惠更斯—菲涅尔原理；单缝衍射；光学仪器分辨本领；衍射光栅与光谱分析；X射线衍射；布喇格公式；自然光和偏振光；布儒斯特定律；马吕斯定律；双折射现象。

复习指导

物理学是研究物质的基本结构和物质之间相互作用、相互转化的科学，它研究物质的最基本、最普遍的运动形式。物理学是一切自然科学和工程技术的基础。掌握物理知识是工程师必须具备的科学素质。

大学物理的内容丰富、涉及面广。本考试大纲仅限于热学、波动学和光学的内容。其中热学内容相对独立，而波动学与光学内容关联性较强，复习时应注意二者的内在联系以及光学的特点。物理学从本质上讲是实验科学，大学物理的基本内容都是围绕着实验进行理论研讨的。因此，在复习时应该对相关实验给予更多关注，要在头脑中对相关内容与过程建立基本的物理图像，这一点无论是对于考题的理解，还是对于具体的解题计算都是至关重要的。物理学强调

基本概念、基本理论和基本计算。按照考试大纲的要求，本复习内容已就基本概念和基本理论进行了简明扼要的阐述，目的是使考生掌握要点，提纲挈领，如能读懂全部内容则不必再去找书。如若基础薄弱，个别内容不能全懂，则需查阅相关教材。

热学是研究物质热运动规律的科学。内容分为两部分，气体动理论和热力学。气体动理论是研究物质热运动的微观理论，强调微观量与宏观量之间的关系，揭示宏观现象的微观本质。这部分的重点是理想气体的压强与温度、理想气体内能、平均碰撞频率和平均自由程、麦克斯韦速率分布律及相关的三种速率。基本计算涉及理想气体状态方程、气体分子的自由度与平均能量、三种速率等。定性讨论的问题是麦克斯韦速率分布律。其中关于速率分布函数物理意义的理解是难点。热力学是研究物质热运动的宏观理论，强调描述系统状态的宏观可测量与系统所进行的过程之间的变化关系，以便总结规律，指导生产实践。这部分的重点是热力学第一定律及其对理想气体等值过程和绝热过程的应用、循环过程、热机效率等。基本计算涉及摩尔热容量、不同过程的功与热量及内能增量，再有就是热机循环的效率。热力学第二定律在这里主要为定性讨论。其中绝热过程的计算是难点。在复习做题时要弄清题目的要求，避免概念混淆。例如：在温度为 T 的平衡态下，刚性双原子分子的平均动能与一摩尔双原子分子理想气体的内能形式上很容易弄混。前者为 $5kT/2$，后者为 $5RT/2$。仅一个字母之差。原因是一个分子的平均动能为 $\bar{\varepsilon}=(i/2)kT$，而一摩尔分子气体的内能为 $E=N_A\bar{\varepsilon}=N_A(i/2)kT=(i/2)RT$。

机械波是振动在弹性媒质中的传播过程。掌握振动的相关知识是理解波动的基础。波动学的重点是一维简谐波表达式、波的能量与能流密度、波的干涉（含驻波）。基本计算涉及波的特征量、波强、波的干涉加强与减弱、驻波（含半波损失问题）、声强及多普勒效应。其中波动表达式和波的干涉是难点。定性讨论的有波的几何描述和波的衍射。关于如何求波动表达式的问题，关键是要弄清相位的传递关系。沿着波的传播方向，后面质元的相位比前面质元的相位滞后，这一点与波是沿 x 轴正向传播还是沿 x 轴负向传播无关。依此观点求波动表达式简便快捷。例如：已知 x 轴上 P 点的坐标为 x_P，振动方程为 $y_P=A\cos(\omega t+\varphi)$，波速为 u。若波沿 x 轴正向传播，则 P 点右侧 x 点的振动方程为 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x-x_P}{u}\right)+\varphi\right]$，由于 x 点是任取的，所以此式也是沿 x 轴正向传播的波动表达式。当 $x>x_P$ 时，相位滞后；当 $x<x_P$ 时，相位超前。若波沿 x 轴负向传播，则 P 点左侧 x 点的振动方程为 $y=A\cos\left[\omega\left(t-\dfrac{x_P-x}{u}\right)+\varphi\right]$，同理，此式也是沿 x 轴负向传播的波动表达式。当 $x<x_P$ 时，相位滞后；当 $x>x_P$ 时，相位超前。这里求波动表达式的关键操作是，先相对 P 点在波的传播方向上取一 x 点，然后用两点坐标（x_P 和 x）中大的减去小的作为分子，波速 u 作为分母，其前面加负号表示相位滞后，整体放在时间 t 后面，用括号括上，则波动表达式就求出来了。需要指出，x 点虽然形式上是在传播方向上取的，但实际上是可以在 P 点左侧或右侧任意变化的。以上是求波动表达式的基本技巧，无论波向哪边传，全都适用。

光学包括光的干涉、衍射和偏振三部分。前面波动学的主要内容例如波动表达式、波的干涉与衍射等在光学中仍然适用，只是在光学中要结合具体的仪器且只须重点讨论光程差，这是光学的特点。光的干涉部分重点是双缝干涉、劈尖和牛顿环干涉以及迈克耳孙干涉仪。光的衍射部分重点是单缝衍射、光栅衍射。光的偏振部分重点是布儒斯特定律和马吕斯定律。基

本计算涉及相关仪器的光程差和干涉条纹的形成条件、X 射线衍射、光学仪器分辨本领。双折射现象主要是定性讨论。求解光学题目，应结合具体的光学仪器与元件，对光学现象的形成过程建立起清晰的物理图像。例如：光栅衍射条纹的形成，首先是多光束之间的干涉，再就是每个透光缝单独的衍射，由于光栅后面的凸透镜使得各个单缝的衍射图样重合在一起，多光干涉的光强受此单缝衍射图样的调制形成最后的光栅衍射图样。有了这样一个物理图像之后，对于光栅的缺级问题就很容易求解了。同时，对于透光缝的单缝衍射中央明纹宽度内有几级光栅衍射明纹的问题（如本章仿真习题 2－60）也就迎刃而解了。再比如：同样是在一支光路中加入厚度为 d、折射率为 n 的透光薄膜，由此引起的附加光程差，在双缝干涉中是 $(n-1)d$，而在迈克耳孙干涉仪中则为 $2(n-1)d$。原因是在双缝干涉中，光线只是一次性穿过薄膜，而在迈克耳孙干涉仪中，光线是往返共计两次穿过薄膜。显然，对于仪器光路的了解是非常重要的。

此外，还应对物理学中一些基本常识、常见物理量的数量级有所了解。例如：热学中的标准状态是指压强为一个大气压、温度为摄氏零度的状态；波动学中可闻声波的频率范围是 20－20 000 Hz；在标准状态下空气中的声速约为 340 m/s；光学中可见光的（真空）波长范围约为 400－760 nm；光在真空中的传播速度为 $c = 10^8$ m/s。掌握这些常识，对于解题以及判断结果的正确与否都是很有帮助的。

复习内容

2.1 热学

要求：①了解描写气体状态的各参量的意义，注意各量的单位。

②了解平衡态的意义。

③掌握理想气体状态方程，并能用其求解有关气体状态的问题。

④从气体动理论的观点理解理想气体的压强和温度的物理意义，明确压强和温度与微观量的关系。

⑤理解能量按自由度均分原理的意义，掌握分子平均能量的计算。

⑥掌握理想气体的内能公式，明确理想气体的内能只是温度的单值函数，而与压强和体积无关。

⑦理解气体分子平均碰撞频率和平均自由程的意义及其决定因素。

⑧理解麦克斯韦速率分布律的物理意义，分清气体分子热运动的三种速率：最概然速率、平均速率和方均根速率。

⑨掌握热力学中功、热量和内能的概念及其计算方法。

⑩掌握热力学第一定律，理解理想气体各等值过程和绝热过程的特点，掌握相应过程中功、热量和内能增量的计算。

⑪理解循环过程的概念以及卡诺循环的特征，掌握热机循环效率和致冷机致冷系数的计算。

⑫理解热力学第二定律两种表述的含义、等价性以及统计意义；了解可逆与不可逆过程，理解与热现象有关的实际宏观过程的不可逆性。

热学是研究物质热运动规律的科学。热学的研究对象是热力学系统，即由大量分子组成的系统。按照研究内容和研究方法的不同，热学可以分为两部分：一部分称为气体动理论；另